**1-дәріс**

**Бүтін сандар.**

**Цифрлар. Сандық жүйелер (ондық, екілік).**

**Натурал сандар. Натурал сандарды белгілеу және оны оқу. Жұп, тақ, жай және құрама сандар.**

**Бүтін сандарға қолданылатын амалдар және олардың орындалу тәртібі (реті)**

Натурал сандар ұғымы санау қажеттілігінен келіп шыққан. Ондық санау системасында кез келген натурал сан 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрларының көмегіменжазылады. Ең бастапқы (кіші) натурал сан1 (бір), натурал санның шегі жоқ. Қандай үлкен натурал саны алынса да, оған бір санын қосып, одан үлкен натурал санды алуға болады. Өсу ретіне қарай орналасқан барлық натурал сандар, натурал сандарқатарын құрайды, оны N әріпімен белгілеу келісілген:

 (1)

Бұл қатарда әрбірнатурал санының өз орны бар. Натурал сандарға амалдар қолдану үшін оларды жаза білу керек.

Математикада натурал сан емес, бірақта 1 –санының алдында орналасқан нөл санынқарастырады. Оны нөл символымен «0» белгілейді. Нөл санының қасиеттері мынадай:

1) ;

2);

3);

4) ;

5) .

**Анықтама** бойынша кез келген натурал санның нөл дәрежесі 1 –ге тең. Нөлге бөлугеболмайды, немесе нөлді нөл дәрежеге шығаруға болмайды.

Бір цифрдан тұратын сан – бір таңбалы, екі цифрдан тұратын сан екі таңбалы деп, тағы сол сияқты аталады. Мысалы, екі таңбалы санды былайша жазады , үш таңбалы санды  түрінде, ал кез келген  санын ондық позициялық принципке сүйеніп

 (2)

түрінде жазады. Мұнда  бірліктер,  ондықтар,  жүздіктер цифрын тағыда сол сияқты көрсетеді.

**Мысалдар**:

1) ;

2) ;

3) 91607 = 

Натурал санды (2) теңдік арқылы жазуды стандартты түрде жазу деп те айтады.

**Есте болсын.** Екі таңбалы санды (басқа таңбалы сандарды да)  символы арқылы жазу (үстінен сызық тарту), оны осы сандардың көбейтіндісінен басқаша екенін көрсетеді.

Есеп шығару барысында екі таңбалы санды  өрнегімен, ал үш таңбалы санды  өрнегімен алмастыру қажет екенін ескерген жөн.

**Натурал сандарға қолданылатын амалдар**

Екі немесе бірнеше натурал санды қосу (көбейту) нәтижесі әрқашан натурал сан болады, ал азайту мен бөлудің нәтижесі натурал сан болмауы мүмкін. Егер  және натурал сан болса, онда,  – натурал сандар.

Қосужәнекөбейту амалдарының қасиеттері:

1.  қосудың орын ауыстырымдылық қасиеті.

2.  қосудың терімділік қасиеттері.

3.  көбейтудің орын ауыстырымдылық қасиеті.

4.  көбейтудің терімділік қасиеті.

5.  (көбейтудің қосуға қатысты үлестірімділік касиеті).

Егер  және  сандары болса, онда

1.  – теңдігінде  – қосылғыш,  – қосылғыш, – қосынды деп аталады.

2.  (натурал сан болсын), мұнда  – азайғыш, – азайтқыш,  – айырма деп аталады.

3. , мұнда  – көбейгіш,  – көбейткіш, – көбейтінді деп аталады.

4. : (натурал сан болсын),  – бөлінгіш,  – бөлгіш, – бөлінді дейді, немесе  санын  санының еселігі, ал  санын  санының бөлгіші дейді. Бұл жағдайда  теңдігі орындалады.

**Сандардың бөлінгіштігі және оларды жіктеу. Сандардың 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 25-ке бөліну белгілері. Ең үлкен бөлгіш (ЕҮОБ), ең кіші еселік (ЕКОЕ)**

**Бөлінгіштік белгілері**

1. Нөл кез келген санға бөлінеді.
2. Кез келген натурал сан 1-ге бөлінеді.
3. 2-ге бөліну белгісі. Натурал санның сонғы цифры 2-ге бөлінсе, онда ол сан 2-ге бөлінеді.
4. Натурал санның 3-ке (9-ға) бөліну белгісі. Натурал санның цифрларының қосындысы 3-ке (9-ға) бөлінсе, онда ол сан 3-ке (9-ға бөлінеді).
5. 6-ға бөліну белгісі. Натурал сан 2-ге және 3-ке бөлінсе, онда ол сан 6-ға да бөлінеді.
6. 5-ке бөліну белгісі.Натурал санның сонғы цифры не 0, не 5 болғанда, ол сан 5-ке бөлінеді.
7. 4-ке бөліну белгісі. Натурал санның екі цифрдан тұратын сонғы екі таңбалы саны 4-ке бөлінсе, онда ол сан 4-ке бөлінеді.
8. 25-ке бөліну белгісі. Натурал санның екі цифрдан тұратын сонғы екі таңбалы саны 25-ке бөлінсе, онда ол сан 25-ке бөлінеді.
9. 8-ге бөліну белгісі. Натурал санның үш цифрдан тұратын сонғы үш таңбалы саны 8-ге болінсе, онда ол сан 8-ге бөлінеді.

Дәлелде:

* 1. 9-ға бөлінеді;
  2. 11-ге бөлінеді;
  3. Егерде натурал санында  болса, онда үш таңбалы берілген сан 11-ге бөлінеді;
  4. Егерде  және натурал сандары  натурал санына бөлінсе, онда саныда-ге бөлінеді;
  5. Егерде және натурал сандарының біреуі  натурал санына бөлінсе, онда  көбейтіндісі-ға бөлінеді.

Натурал санның бір мен өзінен басқа бөлгіштері болмаса, онда ол жай сан деп аталады.

Натурал санның 1-ден өзге және өзінен басқа кемінде тағыда бір бөлгіші бар болса, ол сан құрама сан деп аталады.

Мысалы, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 , 37, 41, 43 жай сандар.

**Есте болсын**.

* + 1. Жай сандар ақырсыз көп болады.
    2. Кез келген құрама натурал санды бір ғана тәсілмен жай көбейткіштерге жіктеуге болады.

**Мысал.** 168 санын жай көбейткіштерге жіктейік. Бөлуді ең кіші жай сан 2-ге бөлінетінін тексеруден бастайды. Санның сонғы цифры 8, ол екіге бөлінеді. Бөлінді 84, оны екіге бөлсек 42, ал 42 тағыда 2-ге бөлінеді. 21 тақ сан, ол екіге бөлінбейді; 21 санының қосындысы 2+1=3, ендеше ол 3-ке бөлінеді 21:3 = 7; 7:7=1.

Сонымен, 168= .

Жіктеу барысында біз бірталай әрекет жасадық; іс жүзінде әр істелген амалды қайталап дәлелдеудің қажеті жоқ. Уақытты үнемдеу мақсатында жіктеуді былай жасайды. 168 санының оң жағынан вертикаль сызық жүргізеді, санның тұсына бірінші жай бөлгіш 2-ні жазып, бөліндіні 168-дің астына жазады. Осы процесс бөліндіде 1 саны қалғанынша жалғастырылады. Бағананың оң жағындағы жай сандар көбейтіндісі 168-ге тең:

168 2

84 2

42 2

21 3

7 7

1

**Есте болсын**. Санды жай көбейткіштерге жіктеу барысында бір  саны  рет қайталанса, оны қысқаша былайша жазуға келісілген:  = ; оқуы – «»-ның эн дәрежесі. Мұнда  өрнегі – дәреже,  саны дәреженің негізі;  саны – дәреженің көрсеткіші деп аталады. Мысалы  арқылы жазылады.

**Бірнеше натурал санның ең үлкен ортақ бөлгіші**

Екі натурал 108 және 162 сандарының барлық бөлгіштерін қарастырайық; 108 санының барлық бөлгіштері:1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108. ал 162-нің барлық бөлгіштері: 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54; 162. Осы жазылған бөлгіштердің ішіндегі бірдейлері: 1; 2; 3; 6; 9; 27; 54. Осы сандардың бәрін 108 бен 162 сандарының ортақ бөлгіштері деп, ал олардың ішіндегі ең үлкенін ең үлкен ортақ бөлгіші (белгілеуі ЕҮОБ немесе Д) деп атайды. Бұл 54 саны.

**Ереже:** бірнеше санның ең үлкен ортақ бөлгішін табу үшін бұл сандарды жай көбейткіштерге жіктеп, ең кіші дәрежелерімен алынған ортақ жай көбейткіштердің көбейтіндісін алады.

**Мысалы:**Д(108;162)-ні табу керек болсын. Ол үшін 108 бен 162-ні жайкөбейткіштерге жіктеп жазамыз:

;.

Олай болса Д(108;162)=.Ортақ көбейткіштері 2 және .Жоғарыда басқаша жолмен анықталған 54 саны шықты. Тексеру 108:54= 2; 162:54= 3. Шынында да 108 және 162 сандары 54-ке қалдықсыз бөлініп тұр.

**Бірнеше натурал санның ең кіші ортақ еселігі**

24 және 36 сандарының еселі сандарын жазайық. 24-ке еселі сандар: 24; 48; 72; 96; 120; 144; ...ал 36-ға еселі сандар: 36; 72; 108; 144; 180; ... Жазылған еселіксандар ішіндегі бірдейлері: 72; 144; ... осы сандардың бәрін 24 пен 36 сандарының ортақ еселіктері деп, ал олардың ішіндегі ең кішісін 24 пен 36 сандарының ең кіші ортақ еселігі деп атайды.

Кез келеген натурал m мен n сандарының ең кіші ортақ еселігін ЕКОЕ(m;n) немесе (m;n) арқылы белгілейді.

Сонымен, ЕКОЕ(24; 36) = 72. Тексеру: 72:24 =3; 72:36 = 2.

ЕКОЕ-ті анықтау ережесі. Бірнеше санның ең кіші ортақ еселігін табу үшін бұл сандарды жай көбейткіштергежіктейді. Сонан кейін осы сандардың барлық жай көбейткіштерініңең үлкен дәрежесімен алынған көбейтіндісін табады.

**Мысал.** ЕКОЕ(48; 108)-ті анықтау керек.

Шешуі:;. ЕКОЕ(48; 108) = .

48 2 108 2

24 2 54 2

12 2 27 3

6 2 9 3

3 3 3 3

1 1

2 жай көбейткіші 48-де 4 рет, ал 108-де 2 рет, ендеше  алынады, ал 3 жай көбейткіші 48-де 1 рет, 108-де 3 рет қайталанады, сондықтан оны  түрінде алу керек.

**Есте болсын.** Егерде кез келеген  және  натурал сандары үшін ЕҮОБ (;)=1 болса, онда  және өзара жай сандар деп аталады. Мысалы. ЕҮОБ (42; 55) = 1, сондықтан 42 мен 55өзара жай сандар.Бұл жерде 42 мен 55-тің әрқайсысы құрама сандар. Ал кез келген екі жай санның ортақ бөлгіші әруақытта 1-ге теңболғандықтан, олар өзара жай сандар болып келеді. Егер  мен жай сандар болса,онда олардыңЕКОЕ (;).

**Жай бөлшек. Жай бөлшектің негізгі қасиеті. Бөлшектерге қолданылатын арифметикалық амалдар.**

**Ондық бөлшектер. Периодты бөлшек. Жай бөлшекті ондық бөлшекке айналдыру**

**Рационал сандар**

Математикада сандардың жалпы қасиеттерін көбінесе әріптердің көмегімен жазып көрсету өте ыңғайлы. Мысалы, қосылғыштардың орнын ауыстырғаннан қосынды өзгермейтін заңдылықты былай жазады: .

**Жай бөлшектер**

Жай бөлшек деп  түрінде жазылған санды атайды;  – кез келген натурал сан, бөлшектің бөлімі, ал  – кез келген бүтін сан, бөлшектің алымы. Егерде  натурал сан болса, онда бөлшек  оң бөлшек, ал  теріс бүтін сан болса, онда  бөлшегі теріс деп аталады.

**Есте болсын** 1)  және : бөлшектің жазылуының екі түрі; 2) егерде  болса, онда ; бұдан, қажет жағдайда, бүтін санды бөлімі бірге тең бөлшек түрінде жазуға болатыны көрінеді.

Алымы бөлімінен кішібөлшекті дұрыс бөлшек деп, ал алымы бөлімінен үлкен немесе бөліміне тең бөшекті бұрыс бөлшек деп атауға келісілген. Мысалы: ; ;  – дұрыс бөлшектер, ал ; ; – бұрыс бөлшектер.

Егерде  және  бөлшектері үшін  теңдігі орындалса, онда олардың өзара тең болғаны: .

**Бөлшектің негізгі қасиеті**. Бөлшектің алымы мен бөлімін бір ғана натурал санға көбейтсек немесе бөлсек, онда берілген бөлшекке тең бөлшек алынады. Шынында да  тең екенін бөлшектердің өзара теңдігінің шартын пайдаланып көз жеткізуге болады .Сонымен ; 

Осы қасиетті пайдаланып, мүмкін болған жағдайда берілген бөлшекті екінші өзіне тең бөлшекпен алмастыруға болады.

**Мысал.**Берілген бөлшектердің арасында өзара тең бөлшектер бар ма?

;;.

Шешуі. Болшектің алымы мен бөлімін олардың ортақ бөлгішіне бөлуді бөлшекті қысқарту деп атайды. Алымы мен бөлімі өзара жай сандар болса, онда бөлшек қысқармайтын бөлшек деп аталады. Осыларды ескеріп, берілген бөлшектерді қысқармайтын бөлшек түрінде жазамыз:;;.

Жауабы: , себебі олардың қысқармайтың бөлшектері өзара тең .

Есеп шығару барысында бөлімдері әр түрлі бөлшектерді бірдей ортақ бөлімге келтіругетура келеді. Мысалы  және  бөлшектерін бірдей ортақ бөлімге келтіру жолын қарастырайық. Ол үшін бөлшектердің бөліміндегісандардың ең кіші ортақ еселігін анықтап ЕКОЕ (12; 15)=60 бірінші бөлшектің алымы мен бөлімін 5 –ке, екінші бөлшектің алымы мен бөлімін 4 –ке көбейтсек олардың бөлімдері бірдей 60 болады:

; .

Қажет болған жағдай да, 12 мен 15 сандарының еселіктері көп болатынын пайдаланып (60; 120; 180; 240; ...), осы бөлшектерді әр түрлі басқа да тең бөлшектермен ауыстыруға болады:

;.

**Ереже.** Бөлшектерді ең кіші ортақ бөлімге келтіру үшін: 1) бөлшектердің бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігін табады; 2) ең кіші ортақ еселікті әрбір бөлімге бөліп, қосымша көбейткіштерді есептейді;3)әрбір бөлшектің алымы мен бөлімін сәйкес косымша көбейткішке көбейтеді.

**Жай бөлшектерге қолданылатын амалдар**

Жай бөлшектерге қолданылатын амалдар төмендегі формулаларға сүйенеді:

1) (бөлшектерді қосу және азайту).

2)  (бөлшектерді көбейту).

3) :(бөлшектерді бөлу).

Дербес жағдайлар4) 

Бөлшектердің бөлімі бірдей болса, оларды қосу немесе азайту үшін қорытынды бөлшектің алымына берілген бөлшектердің қосындысына (айырымына) тең санды жазады, ал бөлімі осы бөлшектердің ортақ бөліміне тең болады.

**Мысалы:** + ; – + .

**Есте болсын**. Қажет жағдайда, бұрыс бөлшекті бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшектің қосындысы түрінде жазуға болады. Мысалы  бөлшегін былайша түрлендіріп +  +  жазса, 2 саны бүтін бөлігі және дұрыс бөлшек бөлігі болады. Осылай жазуды бұрыс бөлшекті аралас сан түрінде жазу дейді. Мынадай  жазу түрінбүтін сан 2 мен бөлшеккөбейтіндісімен алмастыруға болмайды.

Көбейтіндісі 1 санына тең бөлшектер (кез келген сандар) өзара кері бөлшектер деп аталады. Мысалы  мен бөлшектері өз аракері, себебі олардың көбейтіндісі 1 – тең:, жалпы түрде «»-ға кері сан санына тең.

**Мысалдар.** Төмендегі амалдардың орындалуына көңіл аударыңыз:

1) + ;

2) ;

3);

4) ;

5) .

**Ескерту.** Арифметикалық амалдарды орындау барысында, мүмкіншілігінше бөлшекті қысқартуды жауабынан бұрын орындаған дұрыс.

6) ;

7) ;

8)  : ;

9) : ;

10) : .

**Есте болсын.** 1)Азайту немесе қосу амалдары аралас сандарға жасалса онда а) бүтін бөліктерін жекелеп азайту (қосу) және дұрыс бөлшек бөлімдерін жеке азайту(қосу)қажет; б) аралас сандарды бұрыс бөлшекке айналдырып сонан соң жалпы ереже бойынша көрсетілген амалдарды орындау керек.

2) Аралас сандарға көбейту және бөлу амалдары орындалса, онда алдымен аралас сандарды міндетті түрдебұрыс бөлшекке айналдырып алу керек.

11);

12) 

.

13)

.

(12) және (13) мысалдарда бөлшектің алымында аз бүтін саннан үлкен натурал санды азайтуға тура келеді. Мұндай жағдайда аралас саннан бір бүтінді алып оны бұрыс бөлшек түрінде жазу керек;(12) мысалда (бізге қажеті 15),

(13) мысалда (бөлшектің бөліміндегі сан 56).

**Ереже**. 1) Арифметикалық амалдарды орындағанда алдымен ретіне қарай көбейту және бөлу амалдары, сонан кейін қосу мен азайту амалдарыорындалады;2) Егерде өрнектің арасында жақшалар болса, біріншіден дөңгелек жақшаның арасы, екіншіден квадратты жақша ішіндегі, сонан кейін фигуралы жақша ішіндегі амалдар 1)ережеге сәйкес орындалады.

14) Есептеңіз:

:

Шешуі:

1) ;

2) ;

3) 1):2) 10:1= 10

4) ;

5) ;

6) 4):5):;

7) 3):6) :;

8) ;

9) 7):8):

Жауабы:30.

**Ондық бөлшектер**

**Анықтама.** Жай бөлшектің бөлімінде  сандары ( 1; 2; 3;...) болған жағдайда оны ондық бөлшек дейді.

Ондық бөлшектің жазылуы:

1) Дұрыс бөлшектің бүтін бөлігі әрқашанда 0 болғандықтан, нөлді үтір таңбасымен айырып, бөлімінде 10 саны тұрса, бөлшектің алымын жазады:

;; ;.

2) Бөлшектің бөлімінде 100, 1000,... сандары болып, ал алымы біртаңбалы сан болғанда үтірден кейінгі санның алдын бір нөлмен, екі нөлмен, тағы солай толтырып жазады.

;; ;.

3) Бұрыс бөлшекті аралас санға айналдырып 1)және 2)ережелері бойынша жазады.

;; . ;.

**Ондық бөлшектерге арифметикалық амалдар қолдану**

Қосу және азайту амалдары. Ереже. Бірнеше ондық бөлшектерді қосқан (азайтқан) кезде үтірлерін бірінін астына бірін келтіріп, бірдей разрядты сандар бірінің тұсында бірі болатындай жазады. Сонан кейін натурал сандарды қосу (азайту ережелерін пайдаланып амалдарды орындайды.

**Есте болсын:** 1) қысқармайтын жай бөлшектің бөлімінің жай көбейткіштерге жіктелуінде тек екіліктері мен бестіктері ғана болса, онда бұл бөлшекті ондық бөлшек түрінде жазуға болады. **Мысалдар:**

;;

;.

2) Егер ондық бөлшекке он жағынан нөлді, немесе бірнеше нөлді қосып жазса, онда оған тең бөлшек алынады.

**Мысалы:**.

Көбейту амалы. Ондық бөлшектерді көбейту үшін үтірлерге көңіл аудармай натурал сандар сияқты көбейтеді. Содан кейін, екі көбейткіштерге қоса есептегенде, үтірден кейін неше цифр болса, көбейтіндіде оң жағынан сонша цифрды үтірмен ажыратады. Егер көбейтіндіде цифрлар саны үтірмен ажыратуға керек цифрлар санынан аз болса, онда алдынғыжағынан жетіспейтін цифрлар орнына нөлдер жазылады. Мысалы: 43,15 –ті 1,2 –ге көбейту керек делік. Сонда  болады. Енді оннан солға қарай үшцифрды үтірмен ажыратамыз, себебі көбейткіштердегі үтірден кейінгі цифрлардың қосынды саны үшке тең. Нәтиже .

**Мысалдар.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) | 2) | 3) |

**Ескерту.** Ондық бөлшекті 10; 100; 1000;... сандарына көбейту үшін берілген бөлшектегі үтірді 1, 2, 3,... орынға (қажет болғанжағдайда, бөлшектің оң жағына нөлдерді жалғап жазып) оңға жылжыту керек.

**Мысалдар.** ; ;

; ;

; .

Бөлу амалы. Ондық бөлшектінатурал санға бөлунатурал санды натурал санға бөлу сияқты орындалады, ал бөліндіде үтірді бүтін бөлікті бөлу аяқталғаннан кейін қояды.

**Мысалдар:** 1)33,15 : 17 = 1,952)1,495 : 23 = 0,065

33,1517 1,49523

171,95138 0,065

161 115

153115

85 0

85

0

Ондық бөлшекті ондық бөлшекке бөлу үшін бөлгішті бүтін санға айналдырып, ондық бөлшекті бүтін санға бөлу түріне келтіреді.

**Мысалы:** 3,978 санын 2,34-ке бөлу қажет болсын. Ол үшін бөлінгіш пен бөлгіштегі үтірді оңға қарай екі орын жылжытамыз, себебі бөлгіште үтірден кейін екі цифр тұр. Сонда .

**Ескертулер:**

1. Бөлінгіш пен бөлгіштегі үтірді бүтіннен кейін бір уақытта бір, екі, үш т.с.с. орынға оңға қарай жылжыту, ол осы сандардың бөлінгіші мен бөлгішін 10; 100; 1000; ... сандарына көбейту екенін білдіреді.
2. Ондық бөлшектерді біріне бірін бөлу әрқашан орындала бермейді. Нәтижеде ақырсыз ондық бөлшек депаталатын сан алынады.
3. Арифметикалық өрнектер ішінде бір сандар жай бөлшек түрінде, екіншілері аралас сандар түрінде, ал кейбірі ондық бөлшек түрінде берілуі мүмкін. Мұнда амалдарды орындау жөнінде былайша кеңес беруге болады – көз жүгіртіп берілген амалдарға қарап шығу қажет. Кей жағдайда қай сандармен жұмыс жасау тиімділігі көрініп тұрады: не ондық бөлшектерді жай бөлшектергекелтіріп, жай бөлшектерге амалдар қолдану ережелері пайдаланылады, не жай бөлшектер мен аралас сандарды ондық бөлшектерге айналдырып (егер бұл мүмкін болса) ондық бөлшектерге амалдар қолдану ережелерін пайдаланады.

**Ондық бөлшекті жай бөлшекке айналдыру**

Ережесі мынадай: ондық бөлшекті жайбөлшекке айналдыру үшін бүтін бөлігінаралассанның бүтін бөлігі ретінде, ол бөлшектің алымына үтірдің оңжағындағы сандарды жазып, бөліміне осы санның цифры нешеу болса, сонша нөлдерді бірдің оң жағынажазады; реті келсе бөлшекті қысқартқан жөн.

Ондық бөлшектерді жай бөлшектер немесе аралас сандар түрінде жазыңыз және төмендегі амалдардың орындалу ретіне көңіл аударыңыз:

1. ;

2. ;

3. ;

4. .

5. ;

6. ;

7. ;

8. ;

9. ::.

**Ереже**: жай болшекті ондық бөлшекке айналдыру үшін онын алымын бөліміне бөледі. Бөлу операциясын орындау кезінде екі жағдай болуы мүмкін. 1)қалдықсыз шектелген ондық бөлшек шығадынемесе 2) периодты ақырсыз ондық бөлшек шығады.

Жай бөлшекті ондық бөлшек түрінде жазуға арналған мысалдар:

1);2);3).

Қарастырған мысалдарда қалдық нөлге тең, сондықтан олар ақырлы ондық бөлшек түрінде жазылады.

4)  – таза периодты бөлшек;

5)  – таза периодты бөлшек;

6)  – аралас периодты бөлшек.

(4),(5) мысалдар таза периодты ондық бөлшектер деп аталады, себебі үтірден кейін 6 немесе 18 цифрлары бірден қайталана береді. Ал (6) мысалда үтірден кейін бір саны тұр, сонан кейін 6 саны ақырсыз қайталанады. Мұндай сандарды аралас периодты бөлшектер деп атайды.

**Ереже.** Таза периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдыру үшін бөлшектің алымына периодын жазады, ал бөлімінепериодта нешецифр болсасонша рет 9 цифрын жазады (мүмкін болса табылған бөлшекті қысқартады).

Төмендегі периодты бөлшектерді жайбөлшек түрінде жазыңыз:

7) ;8) .

Тексеру.65| 9 13|11

637,22...111,1818...

02020

1811

290

88

20

11

9

Жоғарыда  бөлшегін ондық бөлшекке айналдырғанда үтірден кейін бір цифрлы (тегінде бірнеше цифрлар болуы мүмкін) сан тұрғанына көзіміз жетті. Оны біз  түрінде жазып, аралас периодты ондық бөлшегін алдық.(оқылуы: «екібүтін бір және алты периодында»).

Енді керісінше, аралас периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдыру ережесіне көңіл бөлейік.

**Ереже.** Ол үшін бүтін саннан кейін (нөл бүтінді жазбауға келісілген) бөлшектің алымына үтірден кейінгі цифр мен период цифрларынан тұратын саннан үтір мен период арасындағы сан айырмасын, ал бөліміне периодта неше цифр болса сонша рет 9 –ды, оның оң жағына үтір мен период арасында неше цифр болса, сонша нөлді тіркеп жазу қажет.

**Мысалдар:**; ; ;  сандарын жай бөлшек түріне айналдыруды қарастырайық.

9) =;

10) ;

11) ;

Сонғы мысалда бүтін сан1; үтір арасы мен период цифрларынан құралған сан 244, ал үтірден периодқа дейінгі сан 24, олардың айырмасы 244–24=220, периоды бір ғана цифрлы сан, сондықтан бөліміне бір 9 және оның оң жағына екі рет нөл тіркеледі, себебі үтірден периодқа дейін екі таңбалы сан тұр.

Есептеңіз:

Шешуі: Бұл есепте бөлшектің әр түрі аралас берілген. Шешу барысында бөлшектің есептеуге жеңіл түріне көшіп отырмыз. Міндетті түрде периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдырып алу керек.

1) ;

:;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) ;

7)2) +6) ;

8) ;

**Ескерту.** 9 – амалда  жай бөлшегі периоды 571428 тең шексізондық бөлшек екеніне көзімізді жеткіздік.

9) 

10) 8):9) .

11) ;

12) ;

13) 10):12) ;

14) 7):13).

Жауабы:72.

**2-дәріс**

**Қатынастар және пропорциялар. Пропорцияның негізгі қасиеті. Пропорцияның белгісіз мүшесін табу. Санды тура және кері пропорционал бөліктерге бөлу Проценттер (пайыздар). Пайызға, пропорцияға байланысты мәселе есептер**

**Пропорция**

Кез келген екі және сандарын өзара бөлу таңбасымен жазуды білеміз:

:немесе . Осындай жазуларды екі санның қатынасы деп атайды.

Пропорция деп екі қатынастың теңдігін айтады. Жазылуы :: (4)

**Ескерту:** 1)  және  әрқайсысы нөлге тең емес сандар. 2)  мен  пропорцияның шеткі мүшелері, ал  мен  – пропорцияның ортаңғы мүшелері деп аталады.

Пропорцияның негізгі қасиеті деп кез келген пропорциялар үшін орындалатын теңдікті айтады . Осы негізгі қасиетке сүйеніп келесі тұжырымдардың орынды екенін дәлелдеу қиын емес.

1.  – пропорцияның ортанғы мүшелерінің орындарын ауыстыруға болады.

2.  – пропорцияның шеткі мүшелерініңорындарын ауыстыруға болады.

3. 

.

Егерде нөлге тең емес үш түрлі  және сандары берілсе, онда осы сандармен пропорция құратын 4 санды анықтауға болады.

Пропорцияның шеткі бір мүшесі белгісіз болсын. Сондаарқылы жазып

, (5)

Ал пропорцияның ортаңғы бір мүшесі белгісіз болса теңдігінен

(6)

анықтауға болады.

**Жаттығулар**. 1) Мына теңдіктер пропорция ма?

1.;иә, себебі .

2.; иә, бұл теңдік пропорция, себебі 

3.;жоқ, бұл теңдік пропорция болмайды, себебі дұрыс теңдік емес.

2) Пропорция құру. 1. Берілген , ,, сандардан (мүмкін болса) пропорция құру керек.

: : :

: : :,ендеше пропорция.

Берілген төмендегі сандардан пропорция құру керек: 2. 10,35;4,5;9,2және4. Әртүрлі қатынас құрып тексерейік. :;:. Ендеше:: – дұрыс теңдік, сондықтан пропорция құруға болады екен. Жоғарыдағы пропорцияның әртүрлі қасиеттерін ескеріп, басқаша да пропорциялар құруға болатынына көзжеткіземіз: ::;

::;

::.

3) Пропорцияның белгісіз мүшелерін анықтау керек.

1. .

Тексеру:.Жауабы:.

2.  ,.

Тексеру:.Жауабы:.

3.

Шешуі: 1-ші жолы. Пропорция мүшелерін жекелеп есептейміз.

1.:;

2. ;

3. .

Сонда пропорция әбден ықшамдалады:

 ;;.

2-ші жолы. .

Жоғарыдағы амалдарды қайталаймыз.

**Проценттер**

Бөлшектердің ішінде  бөлшегінің ерекше орны бар. Ол процент деп аталады және 1%символымен белгіленеді (оқылуы1 процент), 1% = 0,01.

Сонымен, 2% = ;

25% = ;

50% = ;

100% = ;

0,1% = ;

%=;

275% = .

**Ереже.** 1) p%-ті бөлшек түрінде жазу үшін оны 100-ге бөлу керек: , екінші сөзбен айтқандаp-ны 1%-тің сандық мәніне көбейту қажет.

2)Белгілі бір  санынын, p% табу үшін оны p% сан мәніне көбейту жеткілікті.Сонымен-ның p%-ке сәйкес мәні  саны болса, онда

 (1)

Осы негізгі(1) теңдіктен екі формуланы шығарамыз:(2)және.(3)

(2) формуланы пайдаланып –ті  –ға тең болатын санының өз мәні анықталады; (3) формула  саны  санының неше процентінқұрайтынын көрсетеді.

**Мысалы.** 1) ;осы санның 1%, 2%, 3%, 10%,25%, 50%,75%, табу керек.

Шешуі. Негізгі (1) формуланы пайдаланамыз:

;

;

;

;

;

;

.

1. Бір  санының 1%=6,48. Осы  санын анықтау керек.

Шешуі: (2) формуладан

.

Жауабы: 648.

3) 116,64 саны 648-дің неше процентін құрайды?Берілгені ;;?

Шешуі. (3) формуладан.

Жауабы: 116,64 саны 648-дің 18% – не тең.

4)Төмендегі тұжырымдардың дұрыстығын тексеру керек.

1. 400-дің 0,5%-ті 2-ге тең;

2. 724-тің 25%181-ге тең;

3. 23,04-тің 75% 17,28- ге тең;

4. 460,8-дің 9%41,472-ге тең;

5. 75%-ті 17,28-ге тең болатын сан ;

6. 675-тің 12,5%-ті-ке тең.

**Жиын ұғымы. Жиынның элементтері. Жиындардың бірігуі, қиылысуы. Бос жиындар**

Математикада аса үлкен маңызы бар ұғымдардың бірі жиын ұғымы. Жиын мағынасын өзімізге бұрыннан таныс кейбір мысалдар арқылы жақсы түсінуге болады. Мысалы, бір үйір жылқы, бір табын сиыр, топтағы студенттер саны, қазақ алфавитінің әріптері. Қысқаша айтқанда, жиын деген сөзбен белгілі бір қасиеттерге ие болып, тиісті заң мен біріккен алуан түрлі объектілерді (элементтерді) түсінеміз.

Жиындарды әртүрлі бас әріптермен белгілейді:

A, B, C, N, P, Q, R, …

Егерде A жиының элементі x болса, оны былайша жазады:x ∈ A. Ал, х объекті А жиының элементі болмаса, оны былай белгілейді: x ∉ A.

Бірде бір элементі болмаған жиынды құр жиын деп атап, оны мынадай ∅ таңбамен белгілейді.

Тегінде жиынға еніп отырған элементтер саны әртүрлі болады. Жиынға енген әртүрлі элементтерді бір– бірлеп санап алуға мүмкін болса, ондай жиынды шектеулі жиын деп атайды. Құр жиын шектеулі, натурал сандар жиыны – шектеусіз.

Математикада жиі пайдалатын кейбір шексіз жиындар тұрақты латын бас әріптерімен белгіленеді:

N – натурал сандар жиыны;

Z– бүтін сандар жиыны;

Q – рационал сандар жиыны;

R – нақты сандар жиыны.

Мына жазулар – 7∈ z, ал – 7∉N, ∉ Q,∈ R былай оқылады: минус 7бүтін сандар жиының элементі, ал – 7 натурал сандар жиынына кірмейді, сол сияқты саны рационал сандар жиынына кірмейді де, нақты сандар жиынына кіреді.

**Анықтама.** Егер А жиынының барлық элементтері В жиынының да элементтері болып табылса, онда А жиыны В жиынына кіреді дейді және оны былай белгілейді: A⊂ Bнемесе B⊃A. Мысалы, барлық натурал сандар жиыны рационал сандар жиынына кіреді (бөлігі болады): N ⊂ Q.

Құр жиын кез келген А жиынына кіреді деп келісілген: ∅⊂ A.

**Жиындардың қасиеттері**

1. Кез келген А жиыны үшін A ⊂ А.

2. Егерде A ⊂ B және B ⊂C болса, онда A ⊂ C.

Бірінші қасиет дәлелдеуді қажет етпейді. Екінші қасиетті дәлелдеу. А-ның бір х элементін алайық: x∈ A,ал A ⊂ Bболғандықтан x ⊂ B.

АлB ⊂ C, ендеше x∈ C. Сондықтан A ⊂ C.

**Анықтама.** Егер А жиынының әрбір элементі В жиынының да элементі болып табылса, және керісінше В жиынының барлық элементі А жиынының да элементі болып табылса, былайша айтқанда екі жиын тек бірдей элементтерден тұрса, онда олар өзара тең болады және оны былай жазады: A = B.

**Мысал 1.**N⊂ Z, бірақ N мен Z өзара тең емес.

**Мысал 2.** Берілгенекі квадрат теңдеулердің x2 – 3x – 10 = 0және (x + 2)(x – 5) = 0түбірлерінен тұратын жиындар өзара тең.

**Жиындарды көрсетіп беру жолдары**

1. Жиынға кірген барлық элементтерді санап шығу.

Мысалы, былай жазылған жиын {Асан, Үсен, Қайсар} аттары белгілі үш ұлдан тұрады.

2. Берілген жиынның барлық элементтерін ғана қанағаттандыратын шартты көрсету.

Мысалы, 1-ден 10-ның арасындағы жай сандардан тұратын жиын A = {2; 3; 5; 7} төрт элементтен – 2; 3; 5; 7 сандарынан тұрады.

3. Кез келген В жиыны болсын. Жаңадан құрылған жиын A = {x ∈ B:P(x)} P(x) шартын қанағаттардыратын В жиының барлық элементтерінен тұрады.

Мысалы, өрнек {n ∈ N: n ≥ 10} мына N10 = {10, 11, 12,…}жиынды көрсетеді. Ал мына өрнек {x ∈ R: – 3 ≤ x < 2} төмендегі интервалды [– 3; 2) көрсетеді. Өрнек {x ∈ Z: x2 – 3x – 10 = 0}мына {– 2; 5}жиынды бейнелесе, өрнек {x ∈ Z: x2= – 1} құр жиынды көрсетіп тұр.

**Жиындарға амалдар қолдану**

1. Жиындардың бірігуі.А жиыны мен В жиының бірігуі деп осы екі жиынға да енетін барлық элементерден тұратын М жиынын айтады және мұны былай белгілейді: M = A ∪ B.

2. Жиындардың қиылысуы.А жиыны мен В жиынының қиылысуы деп осы екі жиынға да ортақ енетін барлық элементтерден тұратын N жиынын айтады және оны былай белгілейді: N = A ∩ B.

3. Жиындардың айырмасы.А жиыны мен В жиынының айырмасы деп В жиына енбейтін А жиынының барлық элементтерін айтады және мұны былай белгілейді: A\B.

**1 мысал.** Берілгені: A = {2; 3; 5; 7; 11}, B = {2; 7; 11; 13}. Табу керек: A\B, A ∪ B, A ∩ B.

A\B = {3; 5}, A∪ B = {2; 3; 5; 7; 11;13}, A ∩B = {2; 7; 11}.

**2мысал.** Берілгені: A = {x ∈ R: x ≥– 1}, B={x ∈ R: x < 3}. Табу керек: A\B, A ∪ B; A ∩ B.

A ∪ B = R, A ∩ B = {x ∈ R: – 1≤ x <3} = [– 1; 3), A\B = [3; ∞).

Мына суретте жиындарға қолданылған амалдарды Эйлер-Венн диаграммалары арқылы бейнелеу көрсетілген.



A ∪ BA ∩ B A\B

**3-дәріс**

**Натурал көрсеткішті дәреже. Теріс және нөл көрсеткішті дәреже. Бірдей негізді дәрежелерге қолданылатын амалдар (көбейту, бөлу, дәрежені дәрежелеу)**

**Алгебралық өрнектер**

Жоғарыда сандардан арифметикалық амалдардың таңбалары мен жақшаларды пайдаланып құрылған сандық өрнектердің мәнін табуды қарастырдық. Егерде сандық өрнекте кейбір сандардың орнына әріптерді қойсақ, онда алгебралық өрнектер пайда болады. Мысалы, 5a; 9 x2; 0,5b(a +b2)–9ab2 , – алгебралық өрнектер. Айнымалылардың барлық мүмкін мәндерінің жиыны алгебралық өрнектің анықталу облысы деп аталатынын есқерген жөн. Алгебралық өрнек тек қосу, азыйту, көбейту амaлдарынан тұрса, оны бүтін алгебралық өрнек деп атайды. Ендеше оның айнымалыларына кез келген санды беруге болады.

Алгебралық өрнек қосу, азайту, қөбейту және бөлу амалдарынан құрылса, оны бөлшек алгебралық өрнек деп, ал бүтін және бөлшек өрнектерді рационал өрнектер деп атайды.

**Натурал көрсеткішті дәреже**

Жоғарыда (1.1.3) бірдей натурал сандардың көбейтіндісін дәреже түрінде жазуды қарастырғамыз.

Енді а,b, c нақты сандар, k, m, n – натурал сандар, және abc ≠ 0,a; b; c ∈ R болсын.

Төмендегі формулаларды есте сақтаңыздар.

**1.** anam = an+ m⇔ an+ m=anam

**Мысалдар.**3233 = 32+3 = 35 = 33333=243; (– 2)(– 2) . (– 2) = (– 2)3 = – 8;

aa2a3a4 =a1+2+3+4 =a10; (– b)(– b) = (– b)2=b2;

**2.**=an : am = an– m⇔ an– m= an : am = ;

**Мысалдар.**137 : 135 = 137– 5 = 132 = 169; (a + b)4 : (a + b)3 = (a + b)4– 3 = a + b

5m– n = 5m : 5n ; ck– 2 = ck : c2= ;

**3.**(abc…)n = anbncn… ⇔ anbncn … = (abc…)n

**Мысалдар.**(235)3 = 233353 = 827125 = 27000.

(a2– b2)3 = [(a – b)(a + b)]3 = (a – b)3(a + b)3

**4.**(an)m = anm⇔ anm= amn= (an)m = (am)n

**Мысалдар.**(24)2=242=28=256; (a3)2 = a32=a6;

(b– 5)3 = b– 15;= (a8– 3 . b2)4 =(a5 . b2)4 = a20. b8;

**5.** = ⇔ = 

**Мысалдар.**=  = ; = ;

= = ;

**6.**a0 = 1; a– n = ⇔= a– n;= ⇔=

**Мысалдар.** 1) 50= 1; (– 5)0= 1; = 1; = 1; 2– 3= = ;  = 5– 3;

**Жаттығулар.** Өрнектердің мәнін табыңыз:

1)  = == = 1;

2)  = =  = = 5;

3)  = == = ;

4)  = == .

Өрнектерді ықшамдаңыз:

1. ambnc (– am. b2n) = – am+mbn+2n c = – a2mb3n c;

2. am– 1bn– 2(a.b2c0) = am– 1+1bn– 2+2 =  ambn;

3. 6xm+4. ym– 3 : – 8x4y = xm+4– 4ym– 3– 1 =  xmym– 4;

4. (– 3 x4y2)3 = – 27x12 y6;

5. = = ;

6. = =

=  = 

7. .==

=  = 

**Бірмүше. Көпмүшелік. Бірмүшелік және көпмүшеліктерге амалдар. Көпмүшеліктерді қосу, азайту, көбейту және бөлу.**

**Қысқаша көбейту формулалары. Көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктеу**

Бір мүше деп сандар мен әріптердің көбейтіндісін айтады. Көпмүше – бұл бір мұшелердің қосындысы. Мүшелерінің санына қарай көпмүшелерді екі, үш, төрт, бес мүше т.с.с. деп атау келісілген.

Мынандай сандар мен әріптердің көбейтіндісі 4aaaxyy2,25ay– бұл бір мүше. Егерде көбейтіндінің ішіндегі сандарды көбейтіп, әріптерді дәрежелеп жазсақ, онда бір мүшенің стандартты түрі шығады: 9a4 x2y3; мүнда 9 – бір мүшенің коэффициенті, әріптер дәрежелерінің қосындысы 4+2+3=9 – бір мүшенің дәрежесі болады. Әріптері өз дәрежелерімен бірдей, коэффициенттері әртүрлі (немесе тең) бір мүшелер ұқсас бір мүшелер деп аталады. Әртүрлі өрнектерді түрлендіру барысында ұқсас бір мүшелерді олардың қосындысымен алмастырады. Бұл операцияны ұқсас мүшелерді келтіру деп атайды.

Өрнектің ұқсас мүшелерін келтіру:

1. 6a2b – 3,7a2 b – 0,3a2 b = 2a2b. Коэффициентерін (6, –3, 7 және – 0,3) қосқанда 2 болады.
2. 5xy3+(–5xy3)– қосылғыштар ұқсас бір мүшелер; коэффициентерін қосқанда нөл болады, ендеше бұларды келтіру барысында нөлге тең болатынын ескереміз. Олар өзара «жойылып» кетеді дейді. Сонымен 5xy3 + (– 5xy3) = 0.

**Көпмүшелерге амалдар**

**Ережелер:**

**1.** Бірнеше көпмүшелерді қосу үшін өларды өз таңбаларымен тіркестіріп жазады.

**2.** Көпмүшелерді азайту процессінде азайғышты өз таңбаларымен, ал азайтқыштың әр мүшесін кері таңбамен тіркеп жазады. Екі жағдайда да ұқсас мүшелерін келтіреді.

**3.** Көпмүшелерді көбейткенде көбейгіштің әр мүшесін көбейткіштің мүшелеріне көбейтіп, өз таңбаларымен қосып жазады.

**Есте болсын**. Көбейтіндідегі мүшелер саны көбейгіш пен көбейткіш мүшелерінің сандарының көбейтіндісіне тең екенін ескерген жөн. Әрине, көбейтіндіде ұқсас мүшелері болса, оларды жинақтап жазған жөн.

**4.** Екі көпмүшені өзара бөлместен бұрын бөлінгіш пен бөлгішті стандартты түрге келтіріп, олардың мүшелерінің дәрежелерін кему ретімен жазады. Әрі қарайғы процесс екі санды бірін біріне бөлу тәртібіне ұқсас. Соңғы қалдық нөлге тең болса, онда бірінші көпмүше екінші көпмүшеге дәл бөлінгені. Қалдық қалған жағдайда оның дәрежесі бөлгіштің дәрежесінен аз болатынын ұмытпау керек.

**1мысал.**A = 6a2 + 9ab – 7b2+ 2a2 – 8abжәне B = – 7a2– ab + 6b2

a) A + B = 6a2 + 9ab – 7b2+ 2a2 – 8ab –7a2–ab + 6b2=a2 + 0 – b2= a2– b2– жауабы.

b) A – B = 6a2 + 9ab – 7b2+ 2a2 – 8ab + 7a2 + ab – 6b2=15a2 + 2ab – 13b2– жауабы.

**2мысал.**A = 5x2 – 2x – 16; B = x – 2; = 5x + 8.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5x2 – 2x – 16 | x – 2 |  | 1)5x2: x = 5xболады; |  |
| 5x2 – 10x | 5x + 8 |  | 2) 5x(x – 2) = 5x2 – 10x; |  |
| 8x – 16 |  |  | 3) 5x2– 2x – 16– (5x2 – 10x) = 5x2–2x –16– 5x2 + 10x=8x–16; | |
| 8x – 16 |  |  | 4) 8x : x = 8; |  |
| 0 0 |  |  | 5) 8(x – 2) = 8x – 16; |  |
|  |  |  | 6) 8x – 16 – (8x – 16) = 0. |  |

**3мысал.**А = 5x3+ 6x2 + 4x – 7;B = x+ 1.

= 5x2 + x + 3 –  (1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5x3 + 6x2 + 4x –7 | х+1 |  | 1) 5x3:x = 5x2; | |
| 5x3+ 5x2 | 5x2 +x+ 3 |  | 2) 5x2(x+ 1) = 5x3 +5x2; |  |
| 0 +x2+ 4x – 7 |  |  | 3) A – 5x2 –5x2 = x2+ 4x – 7; | |
| x2+x |  |  | 4) x2: x = x; |  |
| 0+ 3x–7 |  |  | 5) x(x +1) = x2 + x; |  |
| 3x+3 |  |  | 6) x2+4x –7 – x2– x= 3x – 7. |  |
| 0 – 10 | | | 7) 3x:x = 3; |  |
|  | | | 8) 3(x + 1)= 3x +3; |  |
|  | | | 9) 3x – 7– (3x+3)=– 10 – қалдық. |  |

**Ескерту.** 3 мысалда қалдық (–10)болады. 5x2+x+3 үшмүшесі бөлінді. Бөлшекті (1) теңдігі түрінде жазуды бөлшектің «бүтін бөлігін» айырып жазу дейді. Осылай алгебралық бөлшекті түрлендіру жоғары математика есептерін шығаруға себебін тигізеді.

**4 мысал.**6y2 – 5yx –6x2үшмүшесін 2y – 3x екі мүшесіне бөлу керек.

Шешуі:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| =3y+2x. | 6y2 – 5yx – 6x2 | 2y– 3x |
| 6y2 – 9xy | 3y+2x |
| 0 4xy – 6x2 |  |
| 4xy – 6x2 |  |
| 0 0 | | |

**Ескерту.** Бөлінгішті у– тің дәрежесінің кемуіне сәйкес стандартты түрге келтірдік.

Бөлу тәртібі:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) 6y2 : 2y = 3y; | |
| 2) 3y(2y – 3x) = 6y2 – 9yx; |  |
| 3) 6y2 –5yx – 6x2– (6y2 – 9yx)= 4yx – 6x2; | |
| 4) 4yx : 2y = 2x; |  |
| 5) 2x(2y – 3x) = 4yx – 6x2; |  |
| 6) 4xy– 6x2 – (4yx – 6x2) = 0. |  |

**Қысқаша көбейту формулалары**

Көпмүшеліктерді көбейткенде санды екі санның қосындысына (айырмасына) көбейту ережесіне суйенеміз.

а·(b±c)=(b±c)·a=ab±ac

1. (a+b)·(a–b)=m(a–b)=ma–mb=(a+b) a– (a+b) b=a2+ba–ab–b2=a2–b2,бұл жерде

a+b=mарқылы белгіледік.

2. (a + b)(a + b) =a2 + ab + ba + b2= a2 + 2ab + b2.

Осылайша қысқаша көбейту формулалары деп аталып кеткен теңдіктерді аламыз.

I.a2 – b2 = (a + b)(a – b) ⇔ (a + b)(a – b) = a2 – b2

II – III. (a ± b)2 = a2 ± 2ab + b2⇔a2 + 2ab + b2= (a + b)2

a2– 2ab + b2= (a – b)2.

IV. (a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3⇔a3 + 3a2b + 3ab2 + b3 = (a + b)3.

V. (a – b)3 = a3– 3a2b + 3ab2– b3⇔a3– 3a2b + 3ab2– b3 = (a – b)3.

VI. (a + b) (a2– ab + b2) = a3 + b3⇔ a3 + b3 = (a + b) (a2– ab + b2).

VII. (a – b) (a2 + ab + b2) = a3– b3⇔ a3– b3 = (a – b) (a2 + ab + b2).

VIII. a4 – b4 = (a2– b2) (a2 + b2) =(a + b)(a – b) (a2 + b2).

IX. (a + b + c)2 = a2 + b2 + c2+ 2ab + 2ac +2bc.

X. (a + b – c)2 = a2 + b2 + c2 + 2ab – 2ac – 2bc.

**Ескерту.**IV және V теңдіктерді төмендегідей түрлендіріп жазуға болады:

(a + b)3 = a3 + b3+ 3a2b + 3ab2 = a3 + b3 + 3ab(a + b). IV1

(a – b)3 = a3– b3– 3a2b + 3ab2 = a3– b3 – 3ab(a – b). V1

Мысалы, мына теңдеуді + = 2,5шешу керек болсын. = a,= bдесек, онда a + b = .

Теңдіктің екі жағын кубтаймыз:

+ + 3... (+) = , x ≠ 0 – (IV1) формулаға сүйендік.

x +  + 3= ⇔ x +  + = 0 ⇔= 0⇔8x + 8 – 65x = 0⇔8x2––65x + 8 = 0, D = 652 – 162 = 8149 = 9272 = 632;=⇒ x1 = ; x2 = 8.

Дискримантты есептегенде I формуланы пайдаландық.

**Жаттығулар.** Амалдарды орындаңыз:

1. (3a + 2)2 = 92 + 12a + 4;
2. (2m – 5n)2 = 4m2 – 20mn + 25n2;
3. (x + y)(y – x) = y2 – x2;
4. (3y2 – 4x3) 2 = 9y4 – 24x3y2+ 16x6;
5. (4p – q)2 = 16p2 – 4pq + q2;
6. (0,6b3 – 5b2c4) 2 = 0,36b6 – 6b5c4 + 25b4c8;
7. (ab2 + a2)3 = a3b6+3a2b4a2 + 3 ab2 . a4 + a6=a3b6+ a4b4+ a5 b2 + a6;
8. (b3+bc2)3=(b3)3– 3(b3)2 . bc2+3b3(bc2)2– (bc2)3=b9–2b7c2+b4 c4– b3c6.

Төмендегі өрнектер теңбе-теңдік болатындай сұрақтың орнына бірмүшелер қойыңыздар:

1. (6a5 + ?)2 = ? + ? + 25x2⇒ (6a5 + 5x)2 = 36a10 + 60a5x + 25x2;
2. (? + ?)2 = ? + 70b3c + 49c2⇒ (5b3 + 7c)2 = 25b6 + 70b3c + 49c2;
3. (5b2 – ?)2 = ? – 30a2 b3+ ? ⇒ (5b2 – 3a2b)2 = 25b4 – 30a2b3 + 9a4 b2;
4. (? – 4d4)2 = ? + 24c2 d5 + ? ⇒ (3c2d + 4d4)2 = 9c4d2 + 24c2d5 + 16d8;
5. (? – 15a) (? + ?) = 4c2 – ? ⇒ (2c – 15a)(2c + 15a) = 4c2 – 225a2;
6. (5a4– ?)3=?+?+?+8b9⇒(5a4+2b)3=125a12+3·(5a4)2·2b3+3·5a4·(2b3)+8b9=125a12+

+150a8b3+60a4b6+8b9;

1. (? – 2x)3 = x6 – ? + ?– ? ⇒ (x2 – 2x)3 = x6 – 6x5 + 12x4 – 8x3.

**Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеу**

**Анықтама.** Көпмүшені бірнеше көпмүшелердің көбейтіндісі түрінде түрлендіруді оны көбейткіштерге жіктеу дейді.

Көбейткіштерге жіктеудің төмендегі түрлерін мысалдар арқылы қарастырайық.

1. Көпмүшедегі бірмүшелердің ортақ көбейткіштерін жақшаның алдына шығару тәсілі.
2. Көпмүшелердің ортақ көбейткіштері барларын екі мүшеден (немесе үш мүшеден) топтап, бірінші тәсілді пайдаланып көбейткіштерге жіктеу тәсілі.
3. Қысқаша көбейту формулаларын пайдаланып көбейткіштерге жіктеу тәсілі.

**Жаттығулар.** Төмендегі өрнектерді көбейткіштерге жіктеңіз.

1. 6a2b – 3ab2 = 3ab(2a – b).
2. x3 + x2y – x2y – xy2 + x2 + xy = (x3 + x2y) – (x2y + xy2) + (x2 + xy) = x2(x + y) – xy(x + y) + +x(x + y) = (x + y)(x2 – xy + x).
3. 5mn – 5n + 3p – 3mp = (5mn – 5n) – (3mp – 3p) = 5n(m – 1) – 3p(m – 1) = (m – 1)(5n – – 3p).
4. 27 + = 33 + = (3 +) (32 – 3 + ) = (3 +)(9 – +).
5. 125x3 – 8y3 = (5x)3 – (2y)3 = (5x – 2y)(25x2 + 10xy +4y2).
6. (2x + 3y)2 – 9y2 = (2x + 3y – 3y) (2x + 3y + 3y) = 2x(2x + 6y) = 4x(x + 3y).
7. a2 – b2+ 2bc –c2 = a2 – (b – c)2 = (a + b – c)(a – b + c).
8. 4x2 – a2 + 10ab – 25c2=(2x)2–[a2 – 2a5c+(5c)2]=(2x)2–(a– 5c)2=(2x+a–5c)(2x– a+5c).

**Есте болсын:**

**1.** Егерде квадрат үшмүшенің ax2 + bx + cдискриминанты D=b2 – 4ac ≥ 0және түбірлері x1 мен x2 болса, онда

ax2 + bx + c= a(x – x1)(x – x2).

Мысалы, квадрат үшмүшенің 3x2 – 5x– 2дискриминанты D = 52 – 43(– 2) = 49 = 72;оның түбірлері x1 = жәнеx2= 2. Сондықтан

3x2 – 5x – 2 = 3(x + ) (x – 2) = (3x + 1)(x – 2).

Ал үшмүше 4x2 – 4x + 1-деD = 0. Түбірлері x1 = x2 = .Сондықтан

4x2 – 4x+1= 4(x – )(x –) = (2x –1)(2x –1).

Мына үшмүше x2 + x + 1-нің дискриминанты нөлден кіші. Сондықтан x2 + x +1 сызықтық көбейткіштерге жіктелмейді.

**2.** Үшінші дәрежелі көпмүше P(x)=ax3 + bx2 + cx + d былайша түрлендіріледі:

1) үш екі мүшелер көбейтіндісіне ax3 + bx2 + cx + d = a(x – x1)(x – x2)(x – x3), немесе

2) ax3 + bx2 + cx + d = a(x – x1)(x2 +mx + n) – бір екі мүше және квадрат үшмүше көбейтіндісіне жіктеледі.

Мұнда x1, x2, x3 – көпмүшенің түбірлері (x1, x2, x3 әртүрлі немесе арасында өзара тең сандар болуы мүмкін).

Төмендегі көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеңіз.

1. 2x3 – x2 – 5x – 2 = 2x3 + 2x2 – 3x2 – 3x – 2x – 2 = (2x3 + 2x2) + (– 3x2 – 3x) + (– 2x – 2) = =2x2 (x + 1) – 3x(x + 1) – 2(x + 1) = (x + 1) (2x2 – 3x – 2) = (x + 1)[ 2x2 – 4x + x – 2] = (x + +1)[2x(x – 2) + (x – 2)] = (x + 1)(x – 2)(2x + 1);
2. 3x3 + 5x2 – x + 2 = (3x3 + 6x2) + (– x2 – 2x) + (x + 2) = 3x2 (x + 2) – x(x + 2) + (x + 2) =

=(x + 2)(3x2 – x + 1).

**Ескерту.** Бірінші мысалда x1 = – 1, екінші мысалда x1 = – 2 көпмүшелердің түбірлері болатынына көзімізді жеткізіп алдық.

**3.** Төртінші дәрежелі көпмүше P(x)=ax4 + bx3 + cx2 + dx + f

1) төрт екімүшелердің көбейтіндісіне P(x) = a(x – x1)(x – x2)(x – x3)(x – x4), немесе

2) екі екімүшелер және квадрат үшмүшеге P(x) = a(x – x1)(x – x2)(x2 +mx + n), немесе

3) екі квадратты үшмүшелер көбейтіндісіне жіктеледі.

Көпмүшелерді көбейткіштерге жіктеніздер:

1. x4– 4x3– x2 + 16x – 12 = (x – x1)(x – x2)(x – x3)(x – x4).

Егерде көпмүшеліктің бүтін түбірлері болса, олар a=1 болғанда бос мүшенің бөлгіштерінің ішінде болатынын білеміз. Бос мүше – 12, бөлгішетері ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12.x1= 1болса 1– 4 – 1–16 – 12 =0. Ендеше көпмүшеліктен (х – 1) екі мүшелігін бөліп жығаруға болады: x4– 4x3– x2+16x– 12=x4–x3– 3x3+ 3x2–4x2+4x+12x–12=(x4–x3)– (3x3– 3x2)–

– (4x2– 4x)+(12x–12)=x3 (x–1)– 3x2(x–1)–4 x(x–1)+12(x–1)=(x–1)(x3–3x2– 4x+12).

Осы әдіспен басқа түбірлері x2 = 2, x3 = –2,x4 = 3 болатынын дәлелдеуге болады. Сондықтан x4– 4x3– x2 + 16x – 12 = (x – 1)(x + 2)(x – 2)(x – 3).

2. x4–3x2– 4 =  = =

=· = (x2–4)(x2 +1) = (x + 2)(x – 2)(x2 + 1).

Екінші жолы. x2= tдесек x4–3x2– 4=t2–3t–4 = (t– t1)(t– t2)=(t– 4)(t+1)=(x2– 4)(x2+1)=(x + + 2) (x – 2)( x2 +1).

3. 2x4– x3 + x2 – x +2 = (x2 + x +1)( 2x2– 3x + 2).

**Ескерту.** Теңдіктің сол жағын былайша

(2x4 + 2x3+ 2x2) + (– 3x3– 3x2– 3x) + (2x2 +2x +2) жазған жөн.

**Алгебралық бөлшектер және оларға қолданылатын амалдар**

**Анықтама.** Екі көпмүшенің қатынасын алгебралық бөлшек деп атайды.

**Мысалы.**,, , – алгебралық бөлшектер болып табылады.

**Ескерту.**1. Алгебралық бөлшектің анықталу облысы оның бөліміндегі әріптердің мәнін нөлге айналдырмайтын сандар жиынынан тұрады.

**Мысалы.** бөлшегінде анықталу облысы (АО) b≠ 0; бөлшегінде АОm ≠ – n болатын барлық сандар жиыны; бөлшегінде АО барлық нақты сандар жиыны R болады.

2. Егерде екі алгебралық  және бөлшігінде AD = BC болса, онда бөлшектер өзара теңбе– тең деп есептелінеді.

**Бөлшектің негізгі қасиеті**: =  және = 

Бөлшектің алымы мен бөлімін С≠0 көпмүшесіне көбейткеннен, немесе бөлгеннен бөлшек өзгермейді.

Бөлшектерді қысқарту мысалдарын қарастырайық:

1) ;

2)= = ;

3) = = ;

4) = =.

**1.Қосу және азайту амалдары**.

Ереже бойынша

**1.**+ = ; –  = .

Бөлімдері бірдей өрнектен құрылса, оны ортақ бөлімі ретінде жазады да алымдарының қосындысы (айырымы) бөлшектің алымы болады.

**2.**± = ± = .

Бөлімдері әртурлі бөлшектерді қосқанда (азайтқанда) бөлімдерін бірдей түрге (бөлшектің негізгі қасиеті бойынша) келтіреді де, алымдарын өзара қосады (немесе азайтады).

**Мысалдар:**

1) = = .

2) –= = == =m–n.

3)+– =  + – =

+– = == =

= = = .

**Есте болсын.** Алгебралық бөлшектерге аралас амалдарды орындау кезінде әр қосылғышты қысқартып, бөлімдерін көбейткіштерге жіктеп алған тиімді. Арифметикалық бөлшектерге амалдар орындалғандағы сияқты, «ең кіші ортақ бөлгішті» анықтаған жөн.

4) –– = – – =

=  + – = == = .

Ең кіші ортақ бөлгішті x2 + x – 6 = (x + 3) (x – 2) түрінде алдық.

**2. Көбейту және бөлу амалдары.**

**Ережелері:**

**3.** = ; = ;  = .

**4.** == ; = .

Екі бөлшектің көбейтіндісінің алымы – алымдарының көбейтіндісіне, ал бөлімі – көбейгіш пен көбейткіштердің бөлімдерінің көбейтіндісіне тең болады.

Екі бөлшекті бөлу процессінде бөлгішті оған кері бөлшекпен алмастырып, әрі қарай бөлуді көбейту ережесімен орындайды.

Амалдардың орындалумысалдарын қарастырайық:

5)== -== .

6) = = .

7) = = 3.

8) = = .

9) = = –1.

**Ескерту.** Алгебралық бөлшектерге және n натурал саны үшін:

= ; = ; = 1 теңдектері орындалатыны есте болсын.

**4-дәріс**

**Теңдік. Теңбе-теңдік. Теңдеу. Теңдеудің түбірі. Эквивалентті теңдеулер. Бір белгісізді, екі белгісізді теңдеулер. Теңдеудің қасиеттері**

**Анықтама 1.** Әріппен белгіленген белгісізі бар теңдікті теңдеу деп атайды. Жалпы түрде бір белгісізі (айнымалы шамасы) бар n дәрежелі теңдеуді төмендегі түрде жазуға келісілген:

Pn(x) = a0 xn + a1xn –1 + a2xn –2 + … + an –1x + an = 0(1)

Мұндағы a0, a1, a2, …,an –1,an  – рационал сандар, n – теңдеудің дәрежесі, a0 ≠ 0, n∈N.

**Анықтама 2.** Теңдеудің шешімі (түбірі) деп теңдеуді дұрыс сан теңдігіне айналдыратын белгісіздің мәнін атайды.

Мысалы, x0 = –2 мына теңдеудің 3x + 7 = x+ 6 түбірі болады, себебі

3. ( –2) + 7 = . ( –2) + 6, 1 ≡ 1дұрыс теңдік.

**Ескертулер:**

1. Теңдеудің «түбірі» деген сөз «шешімі» деген сөздің синонимі (бір мағынаны білдіреді).
2. Математикада теңдеудің жалпы түрде (1) жазылуынан басқа түрлері болады

F(x) = 0, f(x) = ϕ(x)(2)

**Анықтама 3.** Түбірлерінің жиындары бірдей теңдеулер мәндес, немесе эквивалент деп аталады.

**3.** Теңдеуді шешу ұғымы оның барлық түбірлерін табу немесе теңдеудің түбірі жоқ екенін көрсетуді білдіреді.

**4.** Түбірлері жоқ теңдеулер өзара мәндес деп есептелінеді.

**Анықтама 4.** Егерде (2) теңдеудің кез келген түбірі мына теңдеудің

f1(x) = ϕ1(x)(3)

түбірі болса, онда (3) теңдеу (2) теңдеудің салдары деп аталады.

Мына жазулар f(x) = ϕ(x)⇔f1(x) = ϕ1(x) екі теңдеудің мәндестігін білдіреді, ал мынау f(x) = ϕ(x)⇒f1(x) = ϕ1(x) оң жақтағы теңдеу солжақтағы теңдеудің салдары екендігін білдіреді.

Теңдеулерді шешу барысында оның салдарын шешеді.

Салдар шешімдері жиынының ішінде берілген теңдеуді қанағаттандырмайтын сандар кездесуі мүмкін. Оларды (бөгде түбірлер) шешуге берілген теңдеудің түбірлер жиынынан алып тастау қажет.

**Есте сақтаған жөн.** Қандай да бір теңдеуді шешу барысында, оны оның салдары немесе мәндес теңдеулерімен алмастырып, ең бір қарапайым шешу жолы жартылай ауызша, немесе теңдеудің түбір табу формулалары белгілі түрге келтіруге тырысады.

Дәләлдеуі жеңіл төмендегі қағидаларды білу, тестілік сынақта уақыт үнемдеуге көмегі тиеді:

1. f(x) = ϕ(x) ⇔f(x) – ϕ(x) = 0;
2. f(x) = ϕ(x) ⇔f(x) ±a = ϕ(x)±a;a∈R;
3. f(x) = ϕ(x) ⇔a f(x) = aϕ(x); a ≠ 0;
4. Xжиынында y = f(x) > 0 және y = ϕ(x) > 0, n – натурал сан болса, онда

f(x) = ϕ(x) ⇔fn(x) = ϕn(x);

1. f(x) = ϕ(x)⇔f(x) : g(x) =ϕ(x) : g(x), g(x) ≠ 0.

Теңдеулер жиынтығы берілсін.

f1(x) = ϕ 1(x), f 2(x) = ϕ2(x), …, fn(x) = ϕn(x)(4)

**6.** Төмендегі шарттар орындалса:

1) (1) теңдеудің әр түбірі кемінде (4) теңдеулердің біреуінің түбірі;

2) (4) ішіндегі кез келген теңдеудің кез келген түбірі (1) теңдеудің түбірі болса, онда (1) теңдеу(4) теңдеулер жиынтығына мәндес деп аталады.

Жазылуы: Pn(x) = 0 ⇔ {f1(x) = ϕ1(x), f2(x) = ϕ2(x), …, fn(x) = ϕn(x)}

**Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу әдістері. Жүйені зерттеу.**

**Сызықтық теңдеулер жүйесін қосу, алмастыру тәсілдерімен шешу**

Егер Pn(x) = a0 xn + a1xn –1 + a2xn –2 + … + an –1x + an = 0

теңдеуінде n = 1 болса, онда

a0x + a1 = 0(5)

теңдеуі сызықтық тыңдеу деп аталады. Оның түбірі , a0 ≠ 0 біреу ғана болады.

Егерде a0 = 0, a1≠ 0 болса, онда оның түбірі болмайды. (Санды нөлге бөлуге болмайды).

Егерде a0 = 0 жәнеa1 = 0 болса, онда сызықтық теңдеудің шексіз көп шешімі болады

x∈ R.

Себебі 0x + 0 = 0 кез келген сан үшін орындалады.

Сызықтық теңдеулерді шешудің үлгілері.

1. 5x + 7 = 2x + 16.

Шешуі: 5x + 7 = 2x + 16 ⇔ 5x – 2x=16 – 7 ⇔ 3x = 9 ⇒x =  = 3.

Жауабы: x = 3.

2. 2(1,5y + 4,05) = 3y + 13,1

Шешуі: 2(1,5y + 4,05) = 3y + 13,1 ⇔ 3y + 8,1 = 3y + 13,1 ⇔ 3y – 3y = 13,1 – 8,1 ⇔(3 – –3)y = 5, a0 = 0.

Теңдеудіңтүбірі жоқ.

3. 2(1,7t – 3,8) = 3,4t – 41,9

Шешуі:2(1,7t–3,8)=3,4t–41,9⇔3,4t–7,6=3,4t–7,6⇔3,4t–3,4t=7,6 –7,6⇔(3,4––3,4)t=0⇔0t=0.

Бұл жерже a0 = a1 = 0. Жауабы: t∈R – кез келген сан.

4. = 0,4 + 

Шешуі: = 0,4 + ⇔ – = 0,4 ⇔⇔⇔ = 1 ⇔х = 1.

Жауабы: х = 1.

5. 

Шешуі: ⇔⇔⇔⇔х = 1.

Жауабы: х = 1.

6. 

Шешуі:

6,25 : (1х – 3,75) = 10.⇔ 6 : (1х – 3,75) = ⇔ = 5 ⇔

⇔⇔⇔⇔ 5 = ⇔х = 3.

Жауабы: х = 3.

7. 

Шешуі: ⇔⇔⇔⇔

⇔ 22= 4.

Жауабы: х = 4.

8. 

Шешуі: ;

;

(x – a – b – c)= 0; a≠ 0; b ≠ 0; c ≠ 0 , x – a – b – c = 0; x = a + b + c.

Жауабы: х = a + b + c.

9. [(9х – 29)5 + 1]: 9 = 9.

Шешуі жартылай ауызша:

[(9х–29)5+1]:9=9⇔(9х –29) 5+1=81⇔(9х –29) 5=80⇔9х–29=16⇔9х=45⇔х=5.

Жауабы: х=5.

10. 2(х – 2)(3х – 1) + 4(х + 2) – 7 = (2х – 1) 3х – 2(2х – 1)

Шешуі: 6х2 – 12х – 2х + 4 + 4х + 8 – 7 = 6х2 – 3х – 4х + 2 ⇔ 6х2 – 10х + 5 = 6х2 – 7х + 2 ⇔

⇔6х2 – 10х – 6х2 + 7х = 2 – 5 ⇔ –3х = –3 ⇔х = 1.

Жауабы: х = 1.

Екі белгісізі  және -і бірінші дәрежелерінде берілген теңдеуді

 (4)

екі белгісізді сызықтық теңдеу деп атайды. Жалпы алғанда мұндай теңдеудің шешімдері шексіз көп болады. Себебі осы теңдеуден  өрнектеп, -тің орнына кез келген сан қойып, -ке тән көптеген сандар алынады. Математикада теңдеудің жауабында бірінші орынға -тің, екінші орынға -тің мәндерін былайша жазуға  келісілген.

Жалпы түрде екі белгісізі бар сызықтық теңдеулер жүйесін (стандартты түрін) былайша жазады

 (5)

Көбінесе сызықтық теңдеулер жүйесінің әр теңдеуі күрделі түрінде берілуі мүмкін. Ондай жағдайда теңдеудегі көрсетілген амалдарды орындап, ұқсас мүшелерін жинақтап, қажет болса бөлшек коэффициенттерін бүтін сандарға айналдырады.

Қарастырылып отырған жүйелерді шешудің жиі қолданылатын екі түрінің ережелерін келтірейік. Сызықтық теңдеулер жүйесін алгебралық қосу тәсілімен шешкенде:

* теңдеулердегі бір белгісіздің алдындағы коэффициенттерін абсолют шамалары бірдей, ал таңбалары әртүрлі түрге келтіреді;
* теңдеулердің екі жағын алгебралық қосып бір белгісізді жояды;
* алынған бір белгісізді теңдеуден -тің (немесе -тің) мәнін анықтап, оған сәйкес келесі белгісізді табады.

Сызықтық теңдеулер жүйесін ауыстыру тәсілімен шешкенде:

* ыңғайлы теңдеуден бір белгісізді екінші белгісіз арқылы өрнектеп алады;
* алынған өрнекті қалған теңдеудегі осы белгісіздің орнына қояды;
* алынған бір белгісізді теңдеуді шешеді;
* бірінші теңдеуден екінші белгісіздің мәнін табады.

Осы ережелердің жалпы түрде орындалуын көрейік.

(5)-ші жүйедегі әр теңдеудің  белгісізінің алдындағы коэффициенттерін өзара теңеу үшін, бірінші теңдеудің екі жағын -ге, екінші теңдеудің екі жағын -ге көбейтіп, алгебралық қосу амалын жасасақ белгісізі бар мүшелер өзара жойылып кетеді:

 (6)

Дәл осылай  белгісізін жойып екінші өрнекті алдық. Төмендегідей белгілер еңгізейік:

   (6)

болсын.

Осындай символдарды пайдаланып (5)-ші жүйені оған эквивалентті болатын (6) жүйені былайша жазуға болады:

-жүйенің шешімі;

 (немесе ), теңдеудің шешімі жоқ, себебі нөлге бөлуге болмайды.

 болса, онда жүйенің шексіз көп шешімі болады, себебі -пен -ке кез келген мән беруге болады.

Тегінде сызықтық теңдеулер жүйесін түрлендіріп, оны стандартты түрге келтіргеннен кейін, бірден жүйенің шешімі бар ма, соны біліп алғанда бір талай уақыт үнемделеді.

Жүйенің шешімі бола ма деген сұраққа жауапты (6)-шы теңдіктерге қарап айтады.

1. Егерде , немесе -пен -тің алдындағы коэффициенттері өзара пропорционал болмаса, онда жүйенің бір ғана шешімі болады, ол
2. Егерде  ал  болса, онда жүйенің шешімі жоқ. Коэффициенттері арқылы:  орындалса, онда жүйенің шешімі болмайды.
3. Егерде , немесе  болса, онда жүйенің шешімі шексіз көп болады. Шынында да  делік, одан  шығады. (5)-ші жүйенің бірінші теңдеуіндегі  және  орнына осы теңдіктерді қойып көрейік:

 теңдіктің екі жағын  бөлсек -бұл жүйенің екінші теңдеуі.

Ендеше жүйеде әртүрлі коэффициенттерден тұратын бірдей теңдеулер екен (аттас коэффициенттері өзара пропорционал!)

Сонымен, осы ережелерге сүйеніп, жүйені шешпей тұрып, оның шешімі бар ма, жоқ па, ал болса шешімі қанша деген сұраққа бірден жауап беруге болады.

Төмендегі жүйелердің шешімдері бола ма?

Бірінші жүйедегі теңдеулердің белгісіздерінің аттас коэффициенттері өзарапропорционал екен, ал бос мүшелерімен пропорционал емес.



Сондықтан жүйенің шешімі жоқ.

Екінші жүйедегі теңдеулердің аттас коэффициенттерінің қатынастары өзара тең емес.

, сондықтан жүйенің бір ғана шешімі бар.

Үшінші жүйенің аттас коэффициенттері өзара пропорционал болып тұр:



Сондықтан ол жүйенің шешімі шексіз көп. Оған көзімізді жеткізу үшін жүйенің екінші теңдеуінің екі жағын да 4 санына көбейтсек, жүйенің бірінші теңдеуі шығады:



Мысалдар қарастырайық.

**1 мысал.**

Шешуі. Екінші теңдеудің екі жағын 2-ге бөлемізде, алгебралық қосамыз:



 Жүйенің жауабы (3;-1).

**Ескерту.** Бұл жүйенің шешімі біреу ғана екенін шешпей тұрып жоғарыда көрсеткеміз.

**2 мысал.**

Шешуі. Жүйенің әр теңдеуін жеке-жеке ықшамдап аламыз:



Дәл осылайша жүйенің екінші теңдеуін ықшамдайық:



Сонымен берілген жүйені стандартты түрге келтірдік.



Бұл жүйені ауыстыру тәсілімен шешейік:

 Екінші теңдеудегі -тің орнына  өрнегін қоямыз:



.Жауабы (-2;2)

**3 мысал.**

Шешуі. Пропорцияның негізгі қасиетін пайдаланып жүйені мына түрге келтіреміз:



Жауабы (2;-3)

**5-дәріс**

**Кез-келген дәрежелі түбір ұғымы. Оң таңбалы санның арифметикалық түбірі. Квадрат түбірді алгоритм көмегі немесе таблицамен табу. Бөлшек көрсеткіш ұғымы. Түбірлерге (радикал) қолданылатын амалдар (қосу, азайту, көбейту, бөлу, дәрежелеу, түбірден түбір табу)**

**Анықтама:** *a саныныңn –ші дәрежелі түбірі деп, n – ші дәрежесі а санына тең болатын в санын айтамыз:* мұндағы вn =a



Анықтама бойынша хn = a теңдеуін аламыз. Мұндағы а > 0,  n > 1.

xn = a теңдеуінің n жұп болғанда және - ға тең екі түбірі, n тақ болғанда - ға тақ бір түбірі болады. Енді, егер m, n – кез келген натурал сан, a, в – кез келген теріс емес нақты сан болғанда, түбірдің қасиеттеріне тоқталайық.

Ережелерді пысықтап, деңгейлік тапсырмалар орындау. (слайд арқылы көрсету).

**10. ***(көбейтіндіден түбір шығару).*

*Мысалы:*

**20***(бөлшектен түбір шығару).*

*Мысалы: *

**30. ***(түбірдің дәреже көрсеткіші мен түбір таңбасының ішіндегі өрнектің көрсеткішін қысқарту).*

*Мысалы: *

**40. ***(түбірді дәрежеге шығару).*

*Мысалы: 1) *

*2) *

***50*. ***(түбірден түбір шығару).*

*Мысалы: *

**60. ***(түбірден құтылу)*

*Мысалы: *

**70. ***(түбір көрсеткіші мен түбір астындағы өрнектің көрсеткішін дәрежелеу).*

*Мысалы: *

**Дербес жағдай: -** арифметикалық түбір. 

**Деңгейлік тапсырмалар:**

**А деңгей. Жауабы:**

**1).   1) **

**2).  2). **

**3).  3). **

**4).  4). 2,5**

**В деңгей. Жауабы:**

**1)  1) 3**

**2)  2) -11**

**3)  3) **

**4)  4) **

**6-дәріс**

**Квадрат теңдеуді шешудің жалпы формуласы. Мұхамет әл-Хорезми формуласы (дискриминанты бойынша квадрат теңдеудің түбірлерін зерттеу)**

Жалпы түрі төмендегі теңдікпен берілген теңдеуді

ax2+ bx + c = 0 (9)

квадрат теңдеу дейді. Мұнда a–бірінші коэффициент, ; b– екінші коэффициент, c– бос мүше.

Түбір табу формуласы , D= b2 – 4ac – дискриминант.

**Есте болсын!** D> 0 болса, x1≠x2; D= 0 болса, x1 = x2; D< 0 болса, теңдеудің түбірі жоқ.

Мысалдардың шешу үлгілері.

22. 2x2 + 7x – 15 = 0; a = 2; b = 7; c = –15; D = b2 – 4ac = 72 – 42( –15) = 49 + 120 = 169 = =132.

;= –5; .

23. 2x2 – 7x – 15 = 0; a = 2; b = –7; c = –15; D = b2 – 4ac = ( –7)2 – 4∙ 2∙( –15) = 49 +120 = =132.

; ;.Жауабы: ; 5

24. 9x2 – 12x + 4 = 0; a = 9; b = –12; c = 4.

D = b2 – 4ac = ( –12)2 – 494 = 144 – 144 = 0.

; .

25. 5x2 + 4x = 0; a = 5; b = 4; c = 0.

Теңдеуді көбейткіштерге жіктеу арқылы шешу тиімді. x(5x + 4) = 0. 1) x = 0. 2) 5x + 4 = 0; x =  = –0,8.

26. 3x2 – 12 = 0; a = 3; b = 0; c = –12.

Шешуі. 3x2 = 12;x2 = 4;x = = ± 2.

261. 4x2– 25 = 0;x2 = ;x =  = 

27. x– = 2; x2 – 2x – 8 = 0; Д = 22 + 418 = 36 = 62.

x= ; x1 = –2; x2 = 4.

**Есте болсын!** Егерде b = 2k (жұп сан) болса, онда ax2+ 2kx + c = 0 теңдеуінің түбірін мына формуламен табуға болады:

, .

28. x + = 14; x2 – 14x + 48 = 0, b = 2k = –14; k = –7; a = 1.

= 7± 1; x1 = 6; x2 = 8.

Келтірілген квадрат теңдеудің

x2+ px + q = 0 (10)

түбірлерін төмендегі формуламен есептейді:



Соңғы формуладан түбірлерін өзара қосып және көбейтсек Виет формуласы алынады:

 және .

Осы теңдіктерді пайдаланып берілген түбірлері бойынша квадрат теңдеуді алуға болады. Мысалы  және  болса, онда 

Ендеше 

29. x2 – 24x + 44 = 0; р = 24; q = 44;  = 12±10. x1 = 22; x2 = 2.

30. 3x2  – 37x + 12 = 0; a = 3; b = –37; c = 12.D = 372 – 4312 = 372 – 122 = 4925.

; x1 = ; x2 =  = 12.

31. 8x2  – 65x + 8 = 0; D = 652 – 488 = 652 – 2282 = 652 – 162 = 4981 = 7292 = 632.

; ; .

32. ⇔ 144 = 625x(1 –x), 625x2  – 625x + 144 = 0.

Қызық шешуі. 252x2 – 252x + 122 = 0;

а =252; b = –252 ; c = 122; D = b2 – 4ac = 254 – 4252122 = 252(252 – 4122) = 25249 = 25272

; ; .

Келтірілген квадрат теңдеудің түбір табу формуласы бойынша шешу:  =

=;

x1 = ; x2 = .

33. 10x2  – 41x + 40 = 0; D= b2 – 4ac = 412 – 41040 = 412 – 402 = 81 = 92.

; .

34. Теңдеуді шешіңіз x2 – 3a – 10a2= 0;

Шешуі. D= b2 – 4ac = (3a)2 – 41( –10)a2 = 49a2 =(7a)2

= –2a; = 5a.Жауабы: –2а; 5а.

35. 6x2 – 5nx – 6n2= 0; D = ( –5n)2 – 41 ( –6)n2 = 25n2 + 144n2 = 169n2 = (13n)2;

;; .

;.

36. = 

Шешуі. = – пропорцияның ортаңғы мүшелерінің орындарын алмастырып теңдіктің екі жағына ( –1) қосамыз:

 – 1=  – 1 ⇔= == ⇔11x2+ 6x – 18 = –3x2+ 5x – 3 ⇔

⇔14x2+ x – 15 = 0;D = (1)2 – 414( –15) = 1 + 840 = 841 = 292.

; =  = ; x2 = 1.

Текстілік есептерді теңдеулер құрып шешудің кейбір үлгілері.

37. Аулада қыдырып жүрген тауықтар мен көжектер саны 35, ал олардың барлық аяқтар саны 96. Аулада неше тауық және көжек кыдырып жүр?

Шешуі. Көжектер саны х, тауықтар саны 35 –х; көжектердің барлық аяқтар саны 4х, ал барлық тауықтар аяқтар саны (35 – x) 2 .

Есептің шартын пайдаланып теңдеу құрамыз:

4x+(35–x) 2=96⇔2x+70=96⇔x=13. Жауабы: көжектер саны 13; тауықтар саны 22.

38. Болаттың бір сортында 5%, екіншісінде 40% никель қоспасы бар. Никель 30% болатын 140 т болат қорытып шығару үшін, бұл екі сорттың әрқайсысынан қанша алу керек?

Шешуі. Бірінші сорттан хт, екіншіден (140 –х)т болат алынсын. Сонда I сортта , екіншіде  таза никельден болады, ал 140 т болатта таза никель бар.

Есептің шарты бойынша ⇔ 5x + (140 –x) 40 = 14030 ⇔⇔x+(140 –x). 8 = 1406 ⇔x + 1408 – 8x = 1406 ⇔1408 – 1406 = 7x⇔ 1402 = 7x⇔⇔40=х.

Жауабы: бірінші сорт 40т. Екінші сорт 100 т.

39. Екі санның қосындысы 2490. олардың біреуінің 6,5% екіншісінің 8,5%-індей. Осы сандарды табындар.

Шешуі.

I– сан х, екіншісі 2490 –х

=⇔6,5x=24908,5–8,5x⇔15x=24985⇔3x=24917⇔x=8317=1411.

Екінші сан 2490 – 1411 = 1079. Жауабы. Бірші сан 1411, екіншісі 1079.

40. Екі таңбалы санның бірлік цифры ондығынан үш есе кем. Егерде осы санды 3 –ке бөліп оған 8 –ді қоссақ, онда цифрларының орны алмастырылған екі таңбалы сан пайда болады. Ол қандай сан?

Шешуі. Бірлік цифр х болса, ондық цифр 3х болады. Берілген екі таңбалы сан 10(3x) + xтүрінде жазылады, ал цифрларының орны алмастырылғанда 10x + 3x-ке тең болады. Есептің шарты бойынша ⇔13x–= 8 ⇔= 8 ⇔x = 3.

Берілген екі таңбалы сан 93.

41. Орақшылар артелі пішен шабуға шықты. Артель біреуі екіншісінен екі есе үлкен екі шабындықты шабуға тиісті болады. Түске дейін бүкіл артель үлкен шабындықты шапты, ал түстен кейін артель бөлінді де, бір бөлігі үлкен шабындықты шауып бітіруге қалды, ал екіншісі кіші шабындықты шабуға кетті. Кешке қарай үлкен шабындық шауып бітірілді де, ал кіші шабындықтан бір участок жер қалды, оны екінші күні жалғыз орақшы күні бойы шауып бітірді. Артельде қанша орақшы болады? (Л.Н. Толстойдың есебі).

Шешуі. Артельдегі орақшы саны х, бір орақшының 1 күнде орған жері у га, үлкен шабындықтың ауданы S болсын.

*S* га

га

I – шабындық II – шабындық

1 күнде х орақшы (ху)га орады, ал жарты күнде х орақшы га орады. Кіші шабындықтың ауданы  – га. Күннің екінші жартысында орақшы ..y га жер орды.

Есептің бірінші шарты бойынша += S ⇔ –үлкен шабындық орылып бітті.

Артельдің екінші бөлігі екінші шабындықта жарты күнде га шапты, қалған жер уга (бір орақшаның бір күнде шапқаны). Сонымен +y = = ; y ≠ 0, +1 = ⇔x = 8.

Жауабы 8 орақшы.

**Виет теоремасы. Квадрат теңдеудің сол жағын көбейткіштерге жіктеу. Биквадрат теңдеулер**

 және  теңдіктері (үшмүшенің дискриминанты оң болғанда) орындалады.

Квадрат теңдеуге келтірілетін мысалдар.

aх4 + bх2 + c = 0. – бұл биквадрат теңдеу.

Белгілеу: х2 = y⇒ х4 = y2; ay2 + by + c= 0

D = b2 – 4ac≥0болса х2 = y1және х2 = y2.

y1>0 жәнеy2>0 x –тің4 мәні болады.

y1< 0жәнеy2<0 – теңдеудің шешімі жоқ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | х4 –10x2+ 9 = 0 | ( –1; 1; –3; 3) |
| 2. | х4+5x2+ 4 = 0 | ∅ |
| 3. | 4х4 –65x2+ 16= 0 | (±; ±4) |
| 4. | 9х4 –19x2+ 2 = 0 | (±; ±) |
| 5. | 4х4 –5x2 –9 = 0 | (±) |
| 6. | x4 –(a2 + b2)х2 + a2b2= 0 | (±a; ±b) |
| 7. | m2n2x4–(m4 + n4)x2+ m2 n2= 0 |  |
| 8. | p2x4–(p2q2 + 1)x2+ q2 = 0 | (±q; ±) |
| 9. | 2х4 –5x2 +2 = 0 | (±; ±) |
| 10. | 4х4 –37x2+ 9 = 0 | (±3; ±) |
| 11. | 4x4–(4m2 + n2)x2+ m2 n2=0 |  |
| 12. | (x2–3x + 6)2 –10x2+ 30x=36 | (0; 1; 2; 3) |
| 13. | 3x3+10x2 + 10x + 3= 0 | ( –1; ) |

**7-дәріс**

**Иррационал теңдеулер**

Егер белгісіз шама радикал таңбасының ішінде болса, ондай теңдеуді иррационал теңдеу деп атайды.

Орта мектеп бағдарламасына сәйкес жиі қарастырылып жүрген иррационал теңдеулердің негізгі түрлеріне талдау жасайық.

1. Берілген теңдеуді түрлендіріп болғаннан кейін онда бір ғана радикал қалуы мүмкін

 (1)

Осындай теңдеуді шешудің алгоритімі:

* теңдеудің анықталу облысын (АО) табады;
* радикалы бар мүшені теңдеудің бір жағына шығарады;
* теңдеудің екі жағын ге дәрежелеп, радикалдан арылады;
* алынған рационал теңдеуді шешеді;
* рационал теңдеудің табылған түбірлері иррационал теңдеудің анықталу облысына кіретінін тексеріп, есептің жауабын жазады.

1. теңдеудегі радикал дәрежесі тақ сан болған жағдайда  шарттың қажеті жоқ. Ал  жұп сан болғанда  шартының орындалуы қажет.

Шешу жолдары қарастырылған есептер.

**1 мысал.** Теңдеуді шешіңіз 

Шешуі. АО: Ендеше теңдеудің түбірі 

**2 мысал.** АО: 

Ерекше жағдайда радикалдың алдында көбейткіш түрінде теріс таңбалы сан тұрмаса, онда радикал арифметикалық түбір ретінде қарастырылады (оң таңбалы деп есептеледі).

Сонымен  теңдігі орындалатын ешқандай нақты сан болмайды.

**3 мысал.**

Шешуі. 

Анықталу облысы: 



 анықталу облысына кірмейді: .

Есептің жауабы: 

**4 мысал.**

Бұл мысалда  өрнегі әр түрлі таңбалы болуы мүмкін. Сондықтан  шарттың қажеті жоқ.

**5 мысал.**.

Шешуі.



Осы сандар теңдеуді қанағаттандыратына көз жеткізіңіздер.

1. Теңдеуді түрлендіріп болғаннан кейін онда әр түрлі екі радикал болуы мүмкін:

 (2)

Мұндай түрдегі теңдеулерді шешу барысында алдымен бір радикалдан, сонан кейін екінші радикалдан арылып, рационал теңдеуге көшеді. Алынған түбірлерді анықталу облысына кіретінін тексеріп теңдеудің жауабын жазады.

**6 мысал.** Теңдеуді шешіңіздер 

Шешуі. Бір түбірді теңдеудің бір жағына шығарамыз  Екі жағын квадраттаймыз 

 Анықталу облысы  Ендеше теңдеудің түбірі 

**7 мысал.**

Шешуі. 1-ші жолы. -жаңадан белгісіз еңгіземіз. Сонда 

 ескеріп 



 Жауабы  және .

Шешудің 2-жолы. Осы типтес иррационал теңдеулерден, қысқаша көбейту формулаларын пайдаланып, бірден рационал теңдеуге көшуге болады. Шынында да, мына теңбе-теңдіктерді 



пайдалансақ, аталған формулалардың пайдасын көреміз.



**Ескерту.** Түбір астындағы түрлендіруге көңіл аударып, қажеті болған жерде осы әдістерді пайдалануға кеңес береміз.

**8 мысал.** Теңдеуді шешіңіздер 

Шешуі. Бір қарағанда мысал өте күрделі көрінуі мүмкін. 7 мысалдағы шешу жолын пайдаланайық. Бұл жолы жаңа белгісіз  болсын. Сонда



Сонымен алғашқы теңдеу былайша жазылады:



 бұлай болуы мүмкін емес, себебі  теңдеуінің түбірлері  және 

Сонымен, берілген күрделі теңдеу екі иррационал теңдеулер шешімдерінің жиынынан тұрады:

 және 

Екінші теңдеуді жоғарыда шештік (7 мысал), ал бірінші теңдеу дәл сол әдіспен шешіледі.

Жауабы: 

**3.** Иррационал теңдеу мына түрде берілсін:  (3)

Ондай теңдеулердің шешу ережесі:

- теңдеудің екі жағын оның сол жағындағы өрнектің «түйіндісіне» көбейтеді;

 теңдеуімен (3) теңдеуді жүйе құрып шешеді де екі қарапайым иррационал теңдеулер алады.

**9 мысал.** Теңдеуді шешіңіздер



Шешуі. 

 делік. Сонда берілген теңдеу  түрінде жазылады.

Енді  теңдігінен  анықтаймыз.



Сызықтық теңдеулер  жүйесін шешіп  мен -ның мәндерін анықтаймыз:







**Ескерту.** 1. Осы теңдеудің бір мүшесін  арқылы белгілесек,  болады. Ендеше  Сонда берілген теңдеу  түріне көшеді.

.



Есепті шығарудың әртүрлі жолдарын білгеннің өзінде, қай жолы уақыт үнемдейді, сол жолды қалаған дұрыс.

2. 9 мысалды шешкенде  арқылы белгілеген едік. Енді  болатынын ескеріп  жүйесінен  алуға болатынын ескеріңіздер.

**10 мысал.** Теңдеуді шешіңіздер



Шешуі.  арқылы белгілеп,  теңдігінен  анықтап, берілген теңдеудегі өрнектерді былайша түрлендіруге болады:



Түрлендіру барысында  екенін ескеріп  алмастырдық. Енді  теңдігінен  екенін анықтаймыз. Теңдеудегі -тің орнына 15 санын қойсақ дұрыс теңдік шығып тұр. Жауабы 15.

**Ескерту.**

1. Берілген теңдеудің екі жағын  санына көбейтсек  теңдігі шығады. Осы теңдеудің бір ерекшілігі түбір астында бөлшек өрнек болмайды.  бірден орындарына қойсақ



Аздап болса да уақыт үнемделеді.

2. Теңдеудің сол жағындағы түбірлердің ішіндегі өрнектерді былайша жазсақ:



тағыда недәуір уақыт үнемделеді!

**Абсолют шамамен берілген теңдеулер**

Белгісізі модуль таңбасының арасында орналасқан теңдеулерді шешу барысында модульдің анықтамасын пайдаланады:

 немесе .

Кейбір теңдеулердің шығару үлгілері.

11. |x| – 5 = 0.

1) x≥ 0 болғанда |x| – 5 = 0 ⇔x– 5 = 0 ⇔x = 5;

2) x< 0 болғанда |x| – 5 = 0 ⇔ –x – 5 = 0 ⇔x = –5;

Қарастырып отырған сызықтық теңдеудің екі түбірі бар: олар 5 және – 5.

12. |x| + 5 = 0.

Шешуі. Теңдеудің сол жағы екі оң таңбалы санның қосындысы, ендеше бұл теңдеуді ешбір сан қанағаттандырмайды. Түбірі ∅ (бос мүше).

Тендеу мына түрде

|mx + n| + k = 0(6)

берілсе, онда k > 0 болғанда теңдеудің шешімі ∅; ал k< 0 болса, онда |mx + n| = – k> 0.

13. |x – 1| – 3 = 0.

Шешуі.

1) Егер x– 1 ≥ 0болса, онда |x –1|=x–1;|x –1| –3=0⇔(x–1) –3=0⇔x= 4.

2) Егерде x–1<0 болса, онда|x –1|= –(x–1);|x –1| –3=0⇔ –(x–1) –3=0⇔ –x+1 –3=0⇔x=–2.

Табылған сандардың мәндері берілген теңдеуді қанағаттаңдырады.

Жауабы: 4 және –2.

14. |x – 2| + 4 = 0. Жауабы: ∅, шешімі жоқ.

15.5x–|x| = 12.

Шешуі.

1) Егер x≥ 0болса, онда |x| = x.

2) Егер x< 0болса, онда|х| = – x.

Сонымен:

1. 5х – х = 12 ⇔ 4x = 12 ⇔x = 3. Бұл сан есептің x≥ 0шартын қанағаттандырып тұр.
2. 5х – |x| = 12 ⇔ 5x – ( –х) = 12 ⇔6x = 12 ⇔x = 2.

x = 2 есептің x< 0 шартын қанағаттандырмайды. Есептің жауабы x = 3.

16. |2x –1| –5 = 2.

Шешуі. |2x – 1| = 7.

1. 2х – 1 > 0 ⇔x>болса, онда 2х – 1 = 7, 2х= 8, х= 4. 4>; түбірі 4.
2. 2х – 1 < 0 ⇔x<болса, онда –(2х – 1) = 7, –2х + 1 = 7, ⇔х = –3. –3 <.

Есептің шарты орындалып тұр.

Жауабы: –3 және 4.

17. .

Шешуі. Жалпы ⎜f(x)⎜= ϕ(x) түрінде берілген теңдеуді шешкенде мына ережені ескереміз:

⎜f(x)⎜= ϕ(x) ⇔және (7)

Сонымен,

1) ⇔болса

x –  = 1 – ;  = ; x =  – қосымша шарт x≥ 1 орындалмай тұр.

Жауабы ∅.

2)  = –(x – 1),x≥ 1 болса, онда

⇔; x = .

≥ 1, ендеше теңдеудің шешімі x = .

Теңдеудің түрі төмендегідей берілген болсын

a1⎜xm1 + n1⎜±a2⎜xm2 + n2⎜ = a,(8)

мұнда a1, a2, a, m1, m2, n1, n2белгілі сандар.

Шешуі. (8) теңдеуді былайша түрлендіріп

a1m1⎜x + ⎜±a2m2⎜x + ⎜= a, –= x1, –= x2

арқылы белгілеп оны мына түрде жазамыз

a1m1⎜x –x1⎜±a2m2 ⎜x – x2⎜ = a.(81)

Әрі қарай осы типтес теңдеулерді шешудің үлгісін қарастырайық.

18. ⎟x + 1⎟+⎟x – 2⎟ = 5.

Шешуі. 1) Модульдің ішіндегі өрнектерді нөлге теңейтін х –тің мәндерін анықтаймыз x + 1 = 0 ⇔x1 = –1; x – 2 = 0 ⇔x2 = 2; x1 <x2болып тұр.

2) Сан өсін –1 және 2 сандары бөлетін үш аралықты табамыз.

Бұлар: ( –∞; –1]; [ –1; 2]; [2; +∞).

3) –∞<x≤ –1 болғанда ⎟x + 1⎜= –(x + 1),⎟x– 2⎜=–(x – 2). Осы мәндерді шығаруға берілген теңдеудің орнына қоямыз:

–(x + 1) – (x – 2) = 5 ⇔ –2x + 1 = 5 ⇔x = –2.

–2 ∈ ( –∝; –1] болғандықтан x = –2 теңдеудің түбірі.

–1 ≤x ≤ 2 болғанда ⎟x + 1⎜= x + 1; ⎟x – 2⎜= –(x – 2).

Сондықтан ⎟x + 1⎜ +⎟x – 2⎜= 5 ⇔x + 1 – (x – 2) = 5 ⇔ 3 = 5 теңдеудің түбір жоқ..

Егерде 2 ≤x< + ∝ болса,онда⎟x + 1⎜= x+ 1; ⎟x – 2⎜= x – 2. Алғашқы теңдеуді түрлендіреміз: ⎟x + 1⎜ +⎟x – 2⎜= 5 ⇔ (x + 1) + (x – 2) = 5 ⇔2x – 1 = 5,

x = 3 ∈ [2; + ∝). Сонымен теңдеудің жауабы: x1 = –2; x2 = 3.

19. Теңдеуді шешіңіз 2⎟x – 2⎜ – 3⎟x + 4⎜ = 1.

Шешуі. 1) x – 2 = 0 ⇔x = 2 ⇔ x2 = 2 x + 4 = 0 ⇔x = –4 ⇔x1 = –4

x1 < x2⇔ –4 < 2; –4 пен 2 сан өсін солдан оңға қарай үш аралыққа бөледі: ( –∝; –4]; [ –4; 2]; [2; +∝).

Енді алдыңғы есептің шығару жолын қайталаймыз.

x∈ ( –∝; –4] болса, онда ⎟x– 2⎟ = –(x – 2); ⎟x + 4⎟ = –(x + 4).

Ендеше

2⎟x – 2⎟ –3⎟x + 4⎟ = 1 ⇔ –(x – 2)2 – 3[ –(x+ 4)] = 1 ⇔ –2x+ 4 + 3x +12 = 1 ⇔

⇔x + 16 = 1 ⇔x =15 ∈ ( –∝; –4].

x∈ [ –4; 2] аралығанда болғанда ⎟x– 2⎟ = –(x – 2); ⎟x + 4⎟ = =x + 4.

Сондықтан

2⎟x –2⎟ –3⎟x+4⎟=1⇔ –(x–2)2 –3(x+4)=1⇔ –2x+4 –3x –12=1⇔

⇔ –5x –8=1⇔x=∈[ –4; 2].

Сондықтан x= берілген теңдеудің түбірі.

Үшінші аралықта x∈ [2; + ∞),⎟x +4⎟ = x + 4, ⎟x – 2⎟ = x –2.

Сонымен 2⎟x– 2⎟– 3⎟x + 4⎟ = 1⇔2(x – 2) – 3(x + 4) = 1 ⇔x = –17

Бұл сан үшінші аралыққа кірмейді, ендеше берілген теңдеудің шешімі бола алмайды.

Есептің жауабы: x = –15 жәнеx = 

20. Теңдеуді шешіңіз –⎟x + 4⎟ +⎟x⎟ +⎟x – 3⎟ = 5

Шешуі. x + 4 = 0 ⇔x = –4, x = 0, x– 3 = 0 ⇔х = 3. x1 = –4; x2 = 0;x3 = 3

Осы сандар бүкіл сан өсін 4 аралыққа бөледі: ( –∝; –4]; [ –4; 0]; [0; 3]; [3; + ∞)



Жоғарыдағы теңдеулерді шешу үлгілерін пайдаланып теңдеудің шешімі x = –2 және x = =12 болатынына көз жеткізіңіздер.

21. Теңдеуді шешіңіз ⎟4x – 2⎟ –⎟2x – 7⎟ = 0

**Ескерту.** Уақыт үнемдеу үшін теңдеуді ⎟4x– 2⎟= ⎟2x – 7⎟түрінде жазып, 4x–2 = ± (2x – –7) теңдеуін шешіп x1 =  және x2 =  аламыз.

**Квадрат теңдеулерге келтіру арқылы шешілетін екі белгісізді теңдеулер жүйесі**

Жалпы түрі мынадай жүйе

 (7)

стандартты түрде шешіледі. Сызықтық теңдеуден -ті  арқылы түрлендіріп  (немесе ), оны бірінші теңдеудегі -тердің орнына қойып -ке байланысты квадрат теңдеу алады



Осы теңдеудің дискриминанты  болған жағдайда (7) жүйе қарапайым екі жүйенің жиынтығына эквивалентті:

 және 

**Ескерту.** Егерде  болса, онда (7) жүйенің шешімі болмайды.

**6 мысал.** Жүйені шешіңіз 

Шешуі: 





Енді қарапайым екі жүйені шешеміз

 және  Жауабы: (1;-1), (5;3)

**7 мысал.** Жүйені шешіңіз 

шешуі. 



Соңғы теңдеудің дискриминанты . Сондықтан квадрат теңдеудің түбірі жоқ. Сонымен бірге шешуге берілген сызықтық емес теңдеулер жүйесінің де шешімі болмайды. Математикада мұндай жүйені үйлесімсіз деп атайды.

**Біртекті теңдеулер жүйесін шешу**

**Анықтама.** және  әріптеріне тәуелді  көпмүшесі қарастырылсын. Егерде көпмүшенің әр мүшесіндегі  пен -тің дәрежелерінің қосындысы -ге тең болса, онда өрнек  дәрежелі біртекті өрнек деп аталады.

Мысалы -екінші дәрежелі, ал -үшінші дәрежелі біртекті көпмүшелер.

Төмендегі түрде берілген жүйелер

 (8)

 (9)

біртекті екінші және үшінші дәрежелі теңдеулер жүйесі деп аталады. Бұл жүйелердің ерекшілігі  болғанда  және  бір мезгілде жүйенің шешімі болмайды. Керісінше, (0;0) шешімі деп есептейік, онда  және  нөлге тең болып шығады.

Ереже. Біртекті жүйесін шешу үшін

1. жүйедегі теңдеулердің сол жағындағы және оң жағындағы өрнектерді өзара бөледі;
2.  алмастыру жасайды;
3. түрлендіру арқылы  әрпіне сәйкес квадрат (куб) дәрежелі теңдеуді шешіп,  пен  арасындағы санды қатынасты табады:;
4. Қарастырылып отырған жүйені бір теңдеуі сызықтың теңдеуден тұратын жүйелердің жиынтығымен алмастырып шешеді.

**8 мысал.** Жүйені шешіңіз:

Шешуі. 1) 

2) 

3) ;



;  ескеріп, екі сызықтық теңдеулер аламыз:

1)  2) 

1. Енді екі жүйелер жиынтығын шешеміз:

а) 

б) 

а) 





Жауабы: 

**9 мысал.** Жүйені шешіңіз 

Шешуі. Бұл жүйеде  болып тұр.  ескеріп бірінші теңдеуді былайша түрлендіреміз:

 арқылы белгілеп квадрат теңдеу аламыз



Қарастыратын қарапайым теңдеулер жүйесі:



 Жауабы: 





Жауабы: 

Жүйенің жалпы жауабы: 

**Жүйенің бір теңдеуін сызықтық көбейткіштерге жіктеуге мүмкін болатын жағдайдағы жүйені шешу**

Екінші дәрежелі екі теңдеуден тұратын жүйені қарастырайық:

 (8)

Егерде теңдеуді  көбейткіштерге жіктеуге  мүмкіншілік болса, онда жүйе (8) екі жүйенің жиынтығына эквивалентті:

а) және б)

**10 мысал.**

Жүйенің  теңдеуін көбейткіштерге жіктейміз:



. Енді шешетін жүйелеріміз мына түрде болады:

а) 



Жауабы: 

б) 



б) жүйенің шешімі, сонымен осы жағдайда алғашқы жүйенің де шешімі болмайды.

Жауабы: (1;1),(-4;-4).

**Симметриялық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу**

Ішіндегі әріптердің орнын алмастырған көпмүшенің түрі өзгермесе, онда көпмүшені симметриялы көпмүше деп атайды. Мысалы, мына  көпмүшелерсимметриялы, себебі



Жүйе  (9)

ең қарапайым симметриялы теңдеулер жүйесі болып табылады. Қосылғыштардың орнын ауыстырғаннан қосындының мәні өзгермейтіні белгілі. Сол сияқты, көбейгіш пен көбейткіштердің орындарын ауыстыруға болатынын білесіздер.

Виет теоремасын пайдаланып (9) жүйенің шешімі  теңдеуінің шешімімен бірдей болатынын дәлелдей аламыз. Егерде ол түбірлер  және  болса, онда  реттелген сандары (9) жүйені қанағаттандыратыны түсінікті.

Мысалы (2;3)  жүйенің шешімі екені көрініп тұр. Ендеше (3;2) сандарыда осы жүйенің шешімі болады.

Жоғары дәрежелі симметриялы теңдеулер жүйесін шешу үшін стандартты белгілеулер  еңгізеді. Бұл белгілердің пайдасы, жүйе теңдеулерін шешу барысында, жоғары дәрежелі теңдеулерді төмен дәрежелі өрнектермен алмастыруға көмектеседі.

Мына түрлендірулерді есте сақтаған жөн:

1) 

2) 

3) 

**11 мысал.**

Шешуі.   болсын.

Сонда 

теңдеуінің сол жағын көбейткіштерге жіктейміз.  теңдеуді қанағаттандыратыны көрініп тұр. Сондықтан теңдеудің сол жағынан  екі мүшелігін бөліп шығаруға болатынын білеміз:





Жіктеудің екінші жолы:



1)2) 

 теңдігінен . Сонымен

және  айнымалыларына байланысты 3 қарапайым жүйе алдық:

а) б) 

в) 

а) жүйесін шешеміз:

Бұл жерде 

керісінше 

б) жүйесінің шешімі: 

.

в) жүйесінің шешімі: 





Жүйенің жалпы жауабы:





**12 мысал.** Теңдеуді шешіңіз . Шешуі. Кейбір күрделі иррационалды теңдеулерді шешкенде жоғарыдағы симметриялы жүйелерді шешкендегі әдісті пайдаланған тиімді.

 және  делік.

Сонда



Енді стандартты белгілеулерге көшеміз

 болсын. Сонда 

Есептің шарты бойынша



 осыларға сәйкес жүйелер

а)  және б) а)  және 





б) жүйенің шешімі жоқ.. Жауабы: 1 және –15.

**8-дәріс**

**Функция ұғымы. Анықталу облысы және функция мәндерінің жиыны. Функцияның берілу әдістері. Тік бұрышты координаттар жүйесі. Тура пропорционалды тәуелділік. Сызықтық функция және оның графигі**

Егер мүмкін мәндер жиынтығынан алынған х-тің әрбір мәніне айнымалы у-тің белгілі бір мәні сәйкес келсе, онда у айнымалы шамасы х айнымалы шамасының функциясы деп аталады. Мұндай тәуелділік у=f(х) түрінде жазылады. f әрпінің орнына басқа әріптер де , т.б.) қолданылады. Мұндағы х-ті тәуелсіз айнымалы (кейдеψ, ϕ(мыс., F, аргумент) деп, ал оның өзгеру облысы (жиыны) у-тің анықталу облысы деп аталады. х-тің өзгеруіне байланысты айнымалы у-тің қабылдайтын мәндерінің жиынын у функциясының өзгеру облысы деп атайды. Функцияның жоғарыда берілген анықтамасында назар аударатын екі жағдай бар: біріншісі — аргумент х-тің өзгеру облысын көрсету, екіншісі — х пен у мәндерінің арасындағы сәйкестік ережені немесе заңды тағайындау. Егер х-тің бір мәніне у-тің бір ғана мәні сәйкес келсе, онда у-ті х-тің бір мәнді Функциясы деп, ал егер х-тің бір мәніне у-тің бірнеше мәні сәйкес келсе, онда у-ті х-тің көп мәнді Функциясы деп атайды.

Айнымалы [шамалар](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D0%BC%D0%B0) (х пен у) мәндерінің арасындағы сәйкестік ережені немесе заңды функц. тәуелділік дейді. Функция көбінесе аналитикалық тәсіл немесе [формула](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0) арқылы (мысалы, , т.б.), кейде графиктік және [таблицалық](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D1%86%D0%B0&action=edit&redlink=1) (дәл не жуық формулалармен есептелген) тәсілдерімен де беріледі. Математиканың одан әрі дамуы нәтижесінде [Функция табиғаты](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D1%82%D0%B0%D0%B1%D0%B8%D2%93%D0%B0%D1%82%D1%8B&action=edit&redlink=1) кез келген айнымалы математикалық объектілер арасындағы сәйкестік ретінде жалпыланды. [Математиканың](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) басқа ұғымдары тәрізді Функция ұғымы да бірден қалыптасқан жоқ. Ол дамудың ұзақ жолынан өтті. “Функция” термині алғаш рет [1692](https://kk.wikipedia.org/wiki/1692) ж. [Г.Лейбництің](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86&action=edit&redlink=1) еңбектерінде кездесті. Функцияның қазіргі ұғымға жақын алғашқы анықтамасын [И.Бернулли](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%98.%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8&action=edit&redlink=1) ([1718](https://kk.wikipedia.org/wiki/1718)) берген, ал бұл ұғымды [Д.Бернулли](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%91%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%B8&action=edit&redlink=1), [Л.Эйлер](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4), [Ж.Фурье](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D1%80%D1%8C%D0%B5&action=edit&redlink=1), [П.Дирихле](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%94%D0%B8%D1%80%D0%B8%D1%85%D0%BB%D0%B5&action=edit&redlink=1), [Н.И. Лобачевский](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9B%D0%BE%D0%B1%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9&action=edit&redlink=1), т.б. одан әрі дамытты

**Декарттық координаттар жүйесі** немесе **картезиандық координаттар жүйесі** - координаттар осіндегі межелері немесе базистік векторларының ұзындықтары тең, жазықтықтағы немесе кеңістіктегі түзу сызықты координаттар жүйесі. Әдетте, тікбұрышты декарттық координаттар жүйесі қолданылады. Бұл жүйені 1637 жылы француз ғалымы [Рене Декарт](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%BD%D0%B5_%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82) (1596 - 1650) енгізген. [Нақты сан](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D2%9B%D1%82%D1%8B_%D1%81%D0%B0%D0%BD)дарды көрнекі түрде өрнектеу үшін сан түзуі пайдаланады. Әрбір нақты санға сан түзуінің бір нүктесі сәйкес болады және керісінше - сан түзуінің әрбір нүктесіне бір нақты сан сәйкес болады. Өзара [перпендикуляр](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80) екі сан түзуі тікбұрышты(декарттық) координаттар жүйесін түзеді.Сан түзулері координаттар осьтері деп аталған.Осылардың қиылысу нүктесіне екі сан осінің бас нүктесі 0(нөл) саны сәйкес болады.Осы коорлинаттар жүйесі жазықтықты төрт бөлікке - квадранттарға бөледі.

Тікбұрышты координаттар жүйесінде нақты сандардың әрбір реттелген жұбына(x, y) жазықтықтың бір нүктесі сәйкес қойылады.Керісінше, жазықтықтың әрбір нүктесіне реттелген сандар жұбы сәйкес болады.Осы сан жұбындағы сандар - сәйкес нүктенің координаттары деп аталған.Координаттардың бас нүктесіне реттелген сандар жұбы(0,0) сәйкес келеді.Координаттардың бас нүктесі O(латынша <<ориго>> - <<басы>> деген сөздің алғашқы әрпінен алынған) нүктесімен белгіленеді.1679 жылы француз математигі Филипп де Лайр(1640 - 1718) <<координаттың бас нүктесі>> деген ғылыми атауды енгізген.

Декарт координаттары - [жазықтықта](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B7%D1%8B%D2%9B%D1%82%D1%8B%D2%9B) белгіленген өзара [перпендикуляр](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80) екі түзуге (өстерге) дейінгі қашықтықтары арқылы нүктенің жазықтықтағы орнын [анықтау](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D1%8B%D2%9B%D1%82%D0%B0%D1%83) әдісі. Бұл ұғымды бүгіннен екі мың жылдан аса бұрын [Архимед](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%85%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%B4) пен Пегастық Апполони, тіпті көне мысырлықтар қарастырған. Бұл [идеяныалғаш](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B4%D0%B5%D1%8F) рет жүйелі түрде [П. Ферма](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F._%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0&action=edit&redlink=1) (P. Fermat) және [Р. Декарт](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0._%D0%94%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82&action=edit&redlink=1) (R. Descartes) дамытты; олардың айтуы бойынша қашықтық тек қана оң сан немесе нөл болуы мүмкін. Аталған қашықтықтардың біреуі немесе екеуі де теріс сан болуы туралы [пікір](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D0%BA%D1%96%D1%80)[И. Ньютонға](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%98._%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD) (I. Newton) жатады. Осы қашықтықтарды алғашқы рет «координаттар» деп атаған [Г. Лейбниц](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%93._%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86) (G. Leibniz) болатын.

**9-дәріс**

**Квадраттық функцияның қасиеттері.**

1. а0 шарты орындалуы тиіс.
2. Функцияның анықталу облысы барлық нақты сандар жиыны.
3. b=0,c=0 болғанда, функция : у=a дербес түріне келеді.
4. Әрбір х үшін теңдігі орындалады, яғни функцияның графигі ОУ осіне қарағанда симметриялы орналасады.
5. Функция графигі парабола.Параболаның тармақтары а еселеуішке тәуелді.a>0 болғанда параболаның тармақтары жоғары бағытталады, ал а<0 болғанда парабола тармақтары төмен бағытталады.
6. a>0,D>0 болғанда, парабола тармағы жоғары қарайды, график ОХ осімен екі нүктеде қиылысады.
7. a<0, D>0 болғанда, парабола тармағы төмен қарайды, график ОХ осімен екі нүктеде қиылысады.
8. a>0,D=0болғанда, парабола тармағы жоғары қарайды, график ОХ осімен жанасады.
9. a<0,D=0 болғанда, парабола тармағы төмен қарайды, график ОХ осімен жанасады.
10. а>0,D<0 болғанда, парабола тармағы жоғары қарайды, график ОХ

осімен қиылыспайды,остің жоғарғы жағында орналасады.



**10-дәріс**

**Теңсіздіктің анықтамасы мен қасиеттері. Теңсіздіктерге қолданылатын амалдар. Теңсіздіктерді дәлелдеу**

Екі  және  нақты сандары берілсін.

Егерде  болса, онда олар өзара тең: .

Егерде  болса, онда  үлкен  –дан: 

Егерде  болса, онда  кіші  –дан: 

Теңсіздіктерді дәлелдеу барысында төменде келтірілген қасиеттерді пайдаланады:

1. егерде  және  болса, онда ;
2. егерде ,  болса, онда ;

2а) егерде ,  болса, онда ;

3) егерде  болса, онда ;

4) егерде  болса, онда ;

5) егерде  және  болса, онда ,

егерде  және  болса, онда ;

1.  болса, онда  немесе .

**Мысалдар:**

1. Егерде , болса онда

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

2.  болса, онда .

3. Егерде  болса, онда төменгі теңсіздіктер орындалады:

1. 
2. 
3. 

**Дәлелдеуі**. 1) .

2)  делік. Сонда 

3) 

4. Егерде  болса, онда .

**Дәлелдеуі.**. (А)

Жоғарыдағы 3-ші мысалдың 1-ші есебінің шешуін пайдалансақ:



(А) теңдігінде соңғы 3 қосындыны олардан үлкен шамамен алмастырамыз:

;

 –теңсіздік ділелделді.

**Бір белгісізі бар теңсіздіктер**

Бір  әріпіне қатысты екі  және  көпмүшелігі берілсін.

Осылайша жазуды

 (1)

бір белгісізді алгебралық теңсіздік деп атайды.

Егерде  ақиқат сандық теңсіздік болса, онда  саны (1) теңсіздіктің шешімі болады. (1) теңсіздігін шешу –оның барлық шешімдер жиынын табу деген ұғымды білдіреді.

Шешімдері бірдей екі теңсіздікті эквивалентті теңсіздіктер деп атайды. Оны былайша жазуға келісілген:

.

Есте болсын: теңсіздіктерді шешу төмендегі эквивалентті түрлендірулерге негізделеді.

1. .
2. 
3. 



1. .

**Ескерту.** Алгебралық теңдеулерді шешудегі ескертулер, теңсіздіктерді шешу барысында қолданылады: алдымен көрсетілген амалдарды орындап, ұқсас мүшелерін біріктіріп, теңсіздіктің екінші жағында орналасқан мүшелерді келесі жағына шығарып, бөлшек коэффициентерді бүтінге айналдырып, ортақ бөлгіш санға теңсіздіктің екі жағын қысқартып, өте қарапайым түрге келтіреді.

Мысалы, теңсіздігін шешу үшін 1)  екімүшелігін квадраттаймыз:.

2) теңсіздіктің екі жағындағы жақшалары ашамыз:



3) оң жақтағы мүшелердің әр мүшенің алдыңғы таңбасын қарама қарсы таңбаға алмастырып теңсіздіктің сол жағына шығарамыз

.

4) ұқсас мүшелерін жинақтап, теңсіздіктің екі жағын 3-ке бөлеміз (оң таңбалы сан болғандықтан теңсіздіктің таңбасы өзгермейді):

Стандартты жоғары  дәрежелі алгебралық теңсіздіктерді мына түрде жазады:

 (2)

Бұдан  болғанда  сызықтық теңсіздік;

 болғанда  – квадрат теңсіздік;

 болғанда  –үшінші дәрежелі теңсіздік тағы сол сияқты теңсіздіктер шығады.

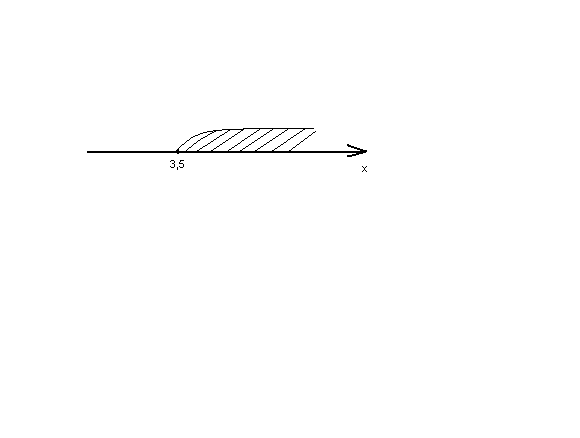
**Сызықтық теңсіздіктер**

1. ,  болғанда.

**Мысал.**

1) .

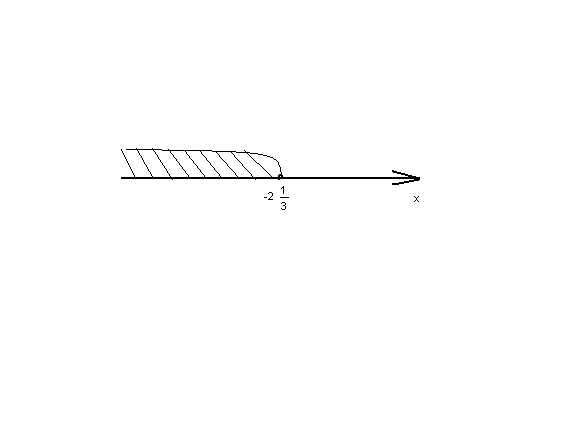
Шешуі:, немесе 



**Ескерту.** Бір белгісізі бар теңсіздіктің шешімін үш түрде жазуға болады.

1. .

 себебі 



Жауабы. 

**Квадрат теңсіздіктер**

1. Квадрат теңсіздіктің жалпы түрі немесе 

Нақты түбірі болғанда квадрат үшмүшені  түрінде жазамыз. Әр уақытта бөлуге болатынын ескеріп  теңсіздігін шешкен жеткілікті.

Жоғары дәрежелі теңсіздіктерді шешу барысында сан өсін пайдаланып интервалдар тәсілін пайдалану тиімді. Әртүрлі мысалдарды шешіп көрейік.

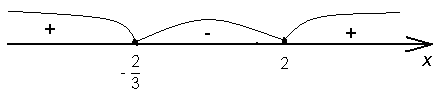
4)  Шешуі. 

.

 мұнда 

Сан өсінің бойына  және  нүктелерін саламыз.

Әр интервалдың бойында  квадрат үшмүше тұрақты таңбасын сақтайды. Түбір мәндерінен  және  өткенде оның таңбасы қарама–қарсыға өзгереді. Осыны ескеріп, теңсіздікті шешу барысында үш интервалдың біреуіндегі  өрнегінің таңбасын анықтау жеткілікті.



 интервалынан  мәнін алайықта теңсіздіктің сол жағының таңбасын анықтайық:  Ендеше осы интервалда . Керісінше, көрші интервалдарда .

Жауабы. .

5) . Алдыңғы есепті шешу барысындағы анықтағанымызды пайдаланып есептің жауабын жазамыз: .

6)  Шешуі. . Жауабы 

**Ескерту.** Теңсіздіктің сол жағы әр уақытта оң таңбалы болатынына былайша түрлендіріп көз жеткізуге болады:



Оң таңбалы сандардың қосындысы оң болатыны түсінікті.

7) Теңсіздікті шешіңіз:.

Шешуі.  саны теңдіктің сол жағын нөлге айналдырады. Өрнекті топтағанда  екімүшесі болатынын ескереміз:

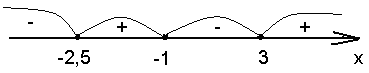


Сонымен

,

.

Сан өсі осы сандармен төрт интервалға бөлінеді. Өрнектің таңбасын тексеруге  интервалынан санын алған тиімді:





Сонда басқа интервалдарда оң және теріс таңбалар алмасып отырады. Жауабы: .

8) теңсіздігінің жауабы: .

**Есте болсын!** 1)Үшіншідәрежелі көпмүшені жалпы алғанда,  теңдік түрінде жазуға болады. Мұнда  сандары сол жақтағы өрнектің түбірлері.

2) Алгебралық теңдеудің бүтін түбірлеріболғанда олар бос мүшенің бөлгіші болады.

8) Теңсіздікті шешіңіз: .

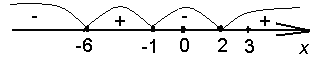
Шешуі. Анықталу облысына  басқа барлық сандар жиыны жатады.  екенін ескеріп, алғашқы теңсіздікті

 (\*) теңсіздігімен алмастырамыз. Сан өсін –6, –1 және 2 нүктелері төрт интервалға бөледі. Теңсіздіктегі орнына  қоямыз:



Сонымен,  интервалындағы  өрнегінің таңбасы теріс,  интервалында – оң,  интервалында – теріс, ал  интервалында оң таңбалы болады.

(\*) теңсіздігінің жауабы .



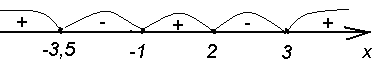
, бірақта  екенін ескеріп, жалпы теңсіздіктің жауабын былайша жазамыз

 немесе .

9)  теңсіздігінің жауабы  болатынына көз жеткізіңіздер.

 екенінескеріп төмендегі теңсіздікті шешеміз.

10)



Жауабы: .

Квадрат теңсіздіктерді шешкенде төменде келтірілген таблицаны пайдалануға болады.

|  |  |
| --- | --- |
| Теңсіздік | Теңсіздіктің шешімі |
| 1. ,   x2мен  нақты мәні болмайды |  |
| 2. .   2) , |  |

**Ескерту.** Бірінші коэффициент  болған жағдайда теңсіздікті ( –1)-ге көбейтіп, таблицадағы екі жағдайдың біріне келтіруге болады.

**11-дәріс**

**Көрсеткіштік функцияның негізгі қасиеттерінің сипаттамасы**

**Анықтама.** Аргументі дәреже көрсеткішінде болатын төмендегі түрде берілген функцияны



көрсеткіштік функция деп атайды.

Оның қасиеттерін сипаттама ретінде атап өтейік.

1. Анықталу облысына барлық нақты сандар жиыны жатады: 
2. Функцияның мәндер жиыны нөлден үлкен оң таңбалы нақты сандардан тұрады:  Осыған сәйкес көрсеткіштік функцияның графигі абсцисса өсінен жоғары орналасады, былайша айтқанда осы өсті қимайды,  болады.
3. Функцияның негізгі  болсын. Сонда  болғанда  болады. Осындай қасиетке ие функцияны монотонды өспелі деп атайды. Егерде  аралығында өзгерсе, онда ; ал  болғанда . Бұдан көрсеткіштік функцияның графигі әр қашанда ордината өсіндегі  нүктесі арқылы өтетінін көреміз. Енді  аралығында өзгерсін; онда  өзгереді.

Осы қасиеттерді жинақтап: -тің мәні минус шексіздіктен плюс шексіздікке өскенде, оған сәйкес функцияның мәні нөлден плюс шексіздікке дейін өседі дейміз.

1. Функцияның негізгі  болған жағдайды қарастырайық. Бірден байқайтынымыз  болғанда  немесе . Функция монотонды кемімелі болады. Аргумент  минус шексіздіктен нөлге дейін өскенде, функцияның мәні плюс шексіздіктен 1-ге дейін кемиді, ал аралығында өссе, сәйкес функцияның мәндері бірден нөлге дейін кемиді.

Осы қасиеттерді пайдаланып  (сурет а) және 

(сурет б) функцияларының эскиз-графигін саламыз.

Тапсырмалар.

1. функцияларының графиктерінің орналасу ерекшеліктеріне талдау жасаңыздар.

2. функциясының графигін қалайша жылдам салуға болады?

3.  функциясының графигін салыңыз.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  | 1 | 2 | 4 | 8 |



сурет а)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 8 | 4 | 2 | 1 |  |  |  |



сурет б)

**12-дәріс**

**Көрсеткіштік теңдеулер**

Белгісіз айнымалы шама дәреже көрсеткішінде болып келген теңдеулер-көрсеткіштік теңдеулер деп аталады.

Жалпы түрі  Жиі кездесетін көрсеткіштік теңдеулердің шығару жолдарын қарастырайық.

1. Егерде теңдеудің түрі былайша берілсе  онда көрсеткіштік теңдеуден алгебралық (рационалдық) теңдеуге көшеді.

Егерде  болса, онда  пайдаланып  теңдеуін шешеді.

**1 мысал.**

.

Жауабы .

**2 мысал.** түрінде жазамыз.



.

Егерде  мәнін теңдеудегі белгісіздің орнына қойсақ, онда санды теңдік шығады

1. Теңдеудіңтүрімынадайболсын.

Сонда  сандарының ең кішісі) жақшаның алдына шығарып, теңдеуді  түріне келтіреді.

**3 мысал.**.

.

Жауабы.

Ескерту. Қарастырылып отырған теңдеуді түрлендіріп  түріне келтіреді. Егерде  болса, онда . Жалпы түрде  теңдеудің шешуі 

1. Теңдеудің жалпы түрі мынадай болғанда

,

жаңа белгісізді  еңгізіп  алгебралық теңдеуге көшеді.

**4 мысал.**. Шешуі 

;



.

 Ендеше 

 Жауабы: -1; 2; 3.

**5 мысал.**. .

Шешуі. .

1)  2)  Жауабы 1; .

1. Теңдеудің жалпы түрі мынадай болсын: . Бұлтеңдеуді «біртекті» теңдеудепатайды. Шешу жолы:  бөледі.

 болса,  екенін ескеріп квадрат теңдеуді  шешеді.  болса



жәнеболғанжағдайдатеңдеудің 2 түбіріболады.

 (немесе ) болса, онда теңдеудің 1 түбірі ғана болады.

**6 мысал.**. Шешуі ,

Мұнда 

; .

.

1)  2) .

Жауабы: -1; 1.

1. . Шешуі. Теңдеуді мына түрге келтіреміз: 

Егерде , болса, онда  Немесе 

**7 мысал.**. 

**Көрсеткіштік теңсіздіктер**

Белгісіз айнымалы шама дәреже көрсеткіштерінде болып келген теңсіздіктерді-көрсеткіштік теңсіздіктер деп атайды. Ең қарапайым теңсіздіктің түрі мынадай: . Мұнда . Осындай теңсіздіктерді шешу барысында көрсеткіштік функцияның монотондылығын пайдаланып  теңсіздігін төмендегідей түрлендіреді:

1) ,

2) ,

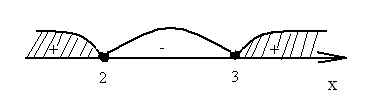
Негізгі  болғанда функцияның үлкен көрсеткішіне функцияның үлкен мәні сәйкес келеді. Керісінше,  болған жағдайда функцияның үлкен мәні көрсеткіштің кіші мәніне сәйкес келеді.

Мысалдарды талдау.

**8 мысал.** Теңсіздікті шешіңіз:

Жауабы: 

**9 мысал.**



Жауабы 

**Есте сақтаңыздар**. Кез келген теңсіздіктің шешімі оны қанағаттандыратын сандардың жиынан тұрады. Жоғарыдағы мысалда  және  сандарын дәрежедегі -тердің орнына қойғанда дұрыс санды теңсіздіктер шығып тұр:



Теңсіздіктегі өрнектерді түрлендіріп ықшамдағаннан кейін теңсіздіктің түрі төмендегідей болуы мүмкін:



Ондамынандайжаңабелгісіздікіргізуарқылыонырационалдытеңсіздіккеайналдырады:



Егерде  болса, онда квадрат теңсіздікті шешеді (жоғарыда ондай теңсіздіктерді шешу жолдарын қарастырғамыз).

**10 мысал.** десек,  болады.



Шешімітіңорнынақоямыз:

Шешімі: .

Жалпытүрібылайшаберілгентеңсіздікті



көбейткіштерге жіктеу арқылы қарапайым теңсіздікке келтіреді.

**11 мысал.**

Шешуі. Теңсіздіктің сол жағын ажыратып  жақшаның алдына шығарамыз:

.

**Ескерту.** Жақшаның алдына  шығарса, онда жақшаның ішінде тек бүтін сандар қалады:

.



**Логарифмдер**

Біроңтаңбалыжәнебіргетеңемессанынқарастырайық. Егерде осы  санын кез келген  санына дәрежелесек, онда саны пайда болады. Бұл теңдікте  саны да оң таңбалы:

.

Математикада дәреже көрсеткіші -ны негізгі болғандағы  санының логарифмі дейді. Сонымен,  – оқылуы: логарифм  негізі . Есте сақтайық: . Осыдан тамаша бір теңбе-теңдік шығады: , мұнда 

Қажет болған жағдайда кез келген оң санды, келесі бір оң сан (бірге тең емес) арқылы өрнектеп жазуға болады.

**Мысалдар.** Сонымен, .

Бұл теңбе-теңдік негізгі логарифмдік теңбе-теңдік деп аталады.

**1 мысал.**

а)  себебі .

б)  себебі .

в)  себебі .

г)  себебі .

d)  себебі .

с)  себебі 

**Ескерту.** Логарифмнің негізгі  болса, онда ал  болса, онда  арқылы жазуға келісілген.

**Логарифмдеу және потенцирлеу**

Сандар мен өрнектердің логарифмін табуды логарифмдеу дейді. Негізгі теоремалар.

 – натурал сандар,  – рационал сандар болсын.

1..

2. .

3. .

4. .

5. .

6. .

7. .

8. 

9. .

10. .

11. .

12. .

1-теңдіктің дәлелдемесі: , .

Осылардан . Логарифмнің анықтамасы бойынша

.

5-теңдіктің дәлелдемесі:

,

; сонымен. .

**2 мысал.** Есептеңіздер.

;



 немесе 

.

**3 мысал.**

;

;

в) ;

г)..

**4 мысал.** Өрнектерді логарифмдеңіз.

**Анықтама.** Логарифмдеуге кері амалды потенцирлеу дейді.Төмендегі өрнектердіпотенцирлеңіздер.

**5 мысал.** Ендеше 



Ендеше .

.

.

г) 



;



**Логарифмдікфункциялар**

**Анықтама.**Мынатүрдеберілгенфункцияны



логарифмдік функция деп атайды.

Логарифмдік функцияның негізгі қасиеттеріне сипаттама берейік.

1.Анықталу облысы – барлық оң таңбалы сандар жиыны. Ендеше оның графигі  өсінің оң жағында орналасады: .

2. Мәндер жиыны .

3. Функцияның негізі  болғанда функция монотонды өседі. Себебі  мәндеріне сәйкес  болады. Аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келеді.

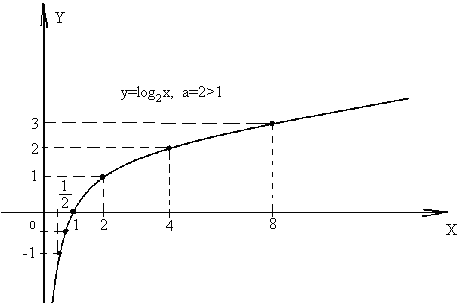
4. Фукцияның графигі абсцисса өсін (1;0) нүктесінде қияды. Себебі  болғанда .

Егерде  нөл мен бірдің арасында өскенде, оған сәйкес -тің мәні – тен нөлге дейін өседі, ал  аралығында өскенде  аралығында өседі.

5. Функцияның негізі  болса, онда логарифмдік функция монотонды кемиді:  болса,  болады .

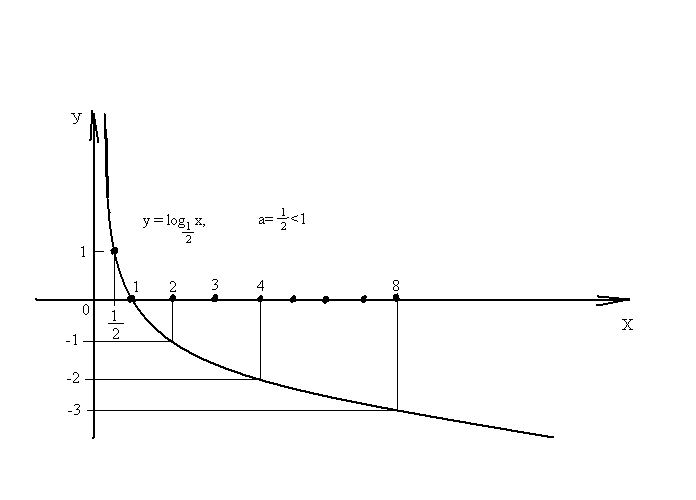
 және  функцияларының эскиз-графигін төмендегі таблицаларды пайдаланып саламыз (суреттер а) және б).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 | 2 | 4 | 8 |
|  | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |



сурет а)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  | 1 | 2 | 4 | 8 |
|  | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 |



сурет б)

Тапсырмалар:

1.  және  функцияларының графиктерін салып, жоғарыда қарастырылған  және  функциялардың графигімен салыстырып талдау жасаңыздар.
2.  және  функциялардың графиктерін салып, олардың орналасу ерекшіліктерін көрсетіңіздер.
3.  және  функцияларының графиктерінің эскизін салып, оған талдау жасаңыздар.

**Логарифмдік теңдеулер**

**Анықтама.** Белгісіз мүшесі логарифм таңбасының ішінде болып келген теңдеуді логарифмдік теңдеу деп атайды.

Логарифмдік теңдеудің шешімі деп, оны ақиқат сан теңдігіне айналдыратын сандардың жиының айтады. Теңдеудің шешімі болмайтынын көрсету де теңдеуді шешкен болып табылады.

Мысалы,  теңдігінің шешімі , себебі  дұрыс теңдік.  бұл теңдеуді қанағатандырмайды, себебі 

Сондықтан  қарастырып отырған теңдеудің шешімі (түбірі) емес.

Логарифдік теңдеулердің жалпылама шешу әдісі жоқ. Мысалы квадрат теңдеуді шешудің формуласы бар екенін білеміз.

Жиі кездесетін қарапайым теңдеулердің шешу жолын қарастырайық. Шешу барысында мына теңдіктерді және оларға сәйкес қосымша шарттарды естен шығармаған жөн.

1. 
2. 
3. 
4. .

Логарифмдік теңдеуді түрлендіріп мына түрге келтірсе



онда оны потенцирлеу әдісімен басқа, шешу жолы белгілі теңдеу және теңсіздіктермен алмастырады.



**1 мысал.**Теңдеудішешіңіздер.

Шешуі. формуланыескеріптеңдеудіықшамдаймыз: 

**2 мысал.**.

Шешуі. ; .



Қосымша шарттарды ескеріп , теңдеудің жауабы  аламыз.

**3 мысал.**.

Шешуі. . Қосымша шарттар:

ендеше  

 қосымша шартты қанағаттандырып тұр. Сондықтан теңдеудің түбірі .

**4 мысал.**

Шешуі. , 

,



Қосымша шарт . Үшмүшенің дискриминанты  болып тұр. Сондық бұл теңсіздіктің шешімі . Анықталған сандар қосымша шартты, сонымен бірге берілген теңдеуді де қанағаттандырады.

**5 мысал.**

Шешуі. ,

– жауабы.

**Ескерту.** екені көрініп тұр.

**6 мысал.**..

Шешуі.



Бұл мысалда  теңдеудегі -тің орнына қойып тексеру тиімді:

. Жауабы 

**7 мысал.**

Шешуі. ,



Қосымша шарт , ендеше теңдеудің түбірі .

**I.** Түрлендірілген логарифмдік теңдеудің түрі



болса, онда жаңа белгісізді  еңгізіп алгебралық теңдеуге көшеміз:



Соңғы теңдеудің түбірлері  болса, онда қарастырылып отырған теңдеудің шешімі қарапайым теңдеулер шешімінің жиынынан тұрады:

.

Ескерту. Егерде  болса, онда теңдеу квадрат  теңдеу болады. Оның шешу жолы белгілі.

**8 мысал.** 3

Шешуі.  болса, онда теңдеу мына түрге келеді:



Ендігі шешетініміз екі қарапайым теңдеу



 жауабы: 

**II.** Теңдеудің түрі мынадай болсын

.

Осындай теңдеуді шешу барысында  теңдігін пайдаланамыз.

**9 мысал**. .

Шешуі. ,

, 

Тестілік орталық ұсынған кейбір күрделі логарифмдік теңдеулердің шешуін талдайық.

**10 мысал.**.

Шешуі. , .

Соңғы теңдіктің екі жағын негізі 6 бойынша логарифмдейік:



 болса, онда 

1) .

2)  Жауабы:.

**11 мысал.**.

Шешуі.  теңдігін пайдаланып теңдеуді түрлендіріп жазамыз

.

**12 мысал.** 

Шешуі. Топтаптүрлендіреміз: 

Екіншіжақшаныжаңабелгісізбенбелгілеп: екіжағынквадраттаймыз:



Алғашқытеңдеумынатүргекеледі

, 

Ендіекітеңдеулержиынтығынқарастырамыз:

1) .

Есептіңшартыбойынша. Сондықтан



2) делік.

Сонда 

1.  2) 

Анықталғансандарқосымшашарттықанағаттандырыптұр. ЖауабыЕскерту. Осысандардытеңдеудегі-тіңорнынақойып, олардыңтеңдеудіқанағаттандыратынакөзжеткізіңіздер.

**Көрсеткіштікжәнелогарифмдіктеңдеулержүйесі**

Көрсеткіштікжәнелогарифмдіктеңдеулержүйесіншешубарысында, теңдеулердіңберілушарттарынасәйкес, олардыкөрсеткіштікжәнелогарифмдіктеңдеулердішешкендегіережелерменформулалардыпайдаланады. Ретінеқарайжаңаданбелгісіздеркіргізіп, алгебралықтеңдеулержүйесінекөшеді.

Бірнешемысалдардыталдайық.

**1 мысал.**Теңдеулержүйесіншешіңіз

Шешуі: арқылыбелгілепжаңажүйегекөшеміз: 

;



Осыларғасәйкесболады.

Ендіқарайтындарымызекіжүйе:

1. 
2. 

Тексеріп көрсек екі жауабы да дұрыс екен. Сонымен жауабы 

**2 мысал.**

Шешуі.





 болсын, сонда ,



 есептің шартын қанағатандырмайды.

 болу керек, сондықтан .

Жауабы: (3, 7).

**3 мысал.**

Шешуі. 

.

 арқылы белгілеп  квадрат теңдеу алдық.

болғандықтан 



теңдігіненболғандаалболғанда

Жауабы: (2, 1) және. Жүйедегіпен-тіңорнынаосымәндердіқойып, оларәртеңдіктіқанағаттыратынынакөзжеткізіңіздер.

**Логарифмдік теңсіздіктер**

**Анықтама.** Белгісіз шама тек қана логарифмнің таңбасының ішінде болып келсе, ондай теңсіздік логарифмдік теңсіздіктер деп аталады.

Мысалы 

логарифмдік теңсіздіктер болады.

Теңсіздіктің шешімі деп оны ақиқат теңсіздікке айналдыратын сандар жиынын айтады. Теңсіздіктің шешімі болмайтынын көрсету де теңсіздікті шешкен болып табылады.

Күрделі логарифмдік теңсіздіктер әртүрлі түрлендіру нәтижесінде оларға эквивалентті қарапайым теңсіздіктерді шешумен алмастырылады.

Төменде осындай қарапайым логарифмдік теңсіздіктер логарифм таңбасы болмайтын рационалды теңсіздіктерге, логарифмнің негізінің мәніне сәйкес қалайша көшу жолдары көрсетілген.

1-түрі. 

2-түрі. 

3-түрі. 

4-түрі. 

5-түрі. 

6-түрі 

7-түрі. 

8-түрі. 

Келтірілген қатынастар логарифмдік функцияның монотондылығына сүйеніп жазылған. Бірнеше мысалдардың шешу жолдарын талдайық.

**1 мысал.** Теңсіздікті шешіңіздер. . Шешуі.  болғандықтан .

Жауабы .

**2 мысал**. . Шешуі  болғандықтан ; қосымша шарт бойынша  болуы керек. Ендеше . Жауабы .

**3 мысал.** . Шешуі.  ескеріп, теңсіздікті былайша жазамыз: , шешімі  Жауабы .

**4 мысал.**. Шешуі. Бұл мысал жоғарыдағы кестенің 7-түріне келіп тұр. Сондықтан

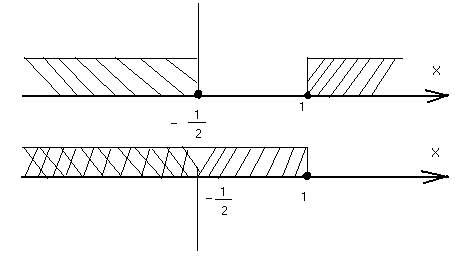


Жауабы .

**5 мысал.**.

Шешуі. 



Екі жиынның қиылысу жиыны .

Тексеру.  болсын. Сонда , бұл ақиқат теңсіздік

Жауабы: .

Егерде логарифмдік теңсіздіктің жалпы түрі



осылай берілсе, онда жаңадан  белгісізін еңгізіп, оны



рационалды теңсіздікпен алмастырады.

Мысалдар қарастырайық.

**6 мысал.**.

Шешуі. Жаңадан  белгісізін еңгізіп квадрат теңсіздікті шешеміз:

. Оның шешімі , немесе

.

Жауабы .

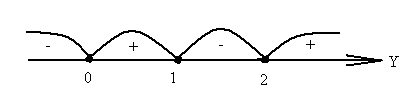
**7 мысал.**. Шешуі. ,

; .

 арқылы белгілесек,  болады.

Сонымен ,  себебі .

 сан өсін пайдаланып осы теңсіздіктің шешімін анықтаймыз.



.

;

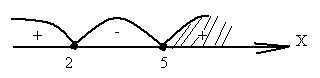
.

Жауабы .

**8 мысал.**.

Шешуі. .

.



Жауабы .

**9 мысал.**.

Шешуі. ,

, .

 ескеріп 

, ,  .

Жауабы .

**13-дәріс**

**Геометриялық фигуралар: кесінді, түзу, сәуле, сынық сызықтар, кесінділерді салыстыру. Бұрыштар. Бұрыштарды салыстыру. Бұрыштардың түрлері: сүйір, тік, доғал, іргелес және вертикаль бұрыштар. Бұрыштың биссектрисасы. Перпендикуляр және көлбеу. Параллель түзулер**

**.1. Түзу мен нүктелердің өзара орналасуы. Бұрыштардың түрлері**

Планиметрияда бір жазықтықтың бойында орналасқан геометриялық фигуралардың қасиеттері зерттеледі. **Нүкте** мен **түзу** – ең қарапайым геометриялық фигуралар болып-есептеледі. Нүктелерді латын алфавитінің бас әріптерімен, ал түзулерді олардың кіші әріптерімен белгілейді (1-сурет). Мысалы, А нүктесі, В нүктесі, а, b – түзулері. Көп жағдайда түзуді оның бойында орналасқан екі нүкте арқылы белгілейді.



1-сурет

А нүктесі а түзуінің бойында жатса оны былайша жазады:Аа немесе АСВ. Ал Мb, MPQ, Nb жазуларды былайша оқимыз: М нүктесі b (немесе PQ) түзуінің бойында жатпайды.

«Әр түрлі екі нүкте арқылы бір ғана түзу өтеді» деген тұжырымды аксиома деп атайтынын білесіздер. Аксиоманы дәлелсіз қабылдайды.

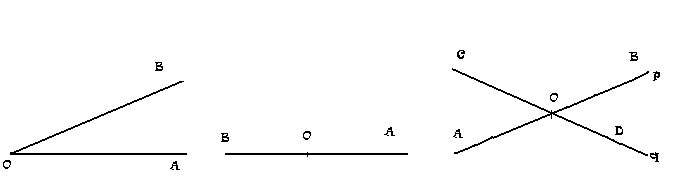
Теорема деп аталатын тұжырымдама сөйлемді дәлелдеу қажет. Мысалы: үшбұрыштың сыртқы бұрышы,онымен іргелес емес екі бұрышының қосындысына тең болатынын дәлелдеп көрсету керек. Бұл сөйлем теорема болып табылады.

Екі нүктемен шектелген түзудің бөлігін **кесінді** дейді. Мысалы: AC, BC, PQ – кесінділер. Негізгі қасиеті: AC+CB = AB немесе CB = AB – AC.

Мына аксиоманы **есте сақтаған жөн**:

Түзудің үш нүктесінің біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады.

1-суреттегі С нүктесі а түзуін екі бөлікке бөлген. СВ түзуін **сәуле** деп атайды, С нүктесі сәуленің бас нүктесі; СА түзуіде сәуле, оның бағыты СВ сәулесіне қарама-қарсы. Бір нүктеден шыққан екі сәуледен тұратын фигураны **бұрыш** деп атайды (2а-сурет)



а) b) c)

2-сурет

2а-суреті: O =AOB =BOA; 2b-суреті: жазық бұрыш; 2c-суретінде **вертикаль** бұрыштар бейнеленген: AOC және BOD, AOD және BOC – вертикаль бұрыштар.

**Есте сақтаған жөн**:

1. AOB< 90º болса, онда ол **сүйір бұрыш** деп аталады.
2. AOB = 90º болса, онда ол **тік бұрыш** деп аталады.
3. AOB> 90º болса, онда ол**доғал бұрыш** деп аталады.
4. **Вертикаль бұрыштар** бір-біріне тең: AOC =BOD.
5. **Жазық бұрыштың** мәні 180º.

**Ескерту**: Әзірше бұрыштың өлшеміне **градустық** өлшемді пайдаланамыз.

Жазық бұрыштың  бөлігін бір градус дейді. Белгілеуі: 1º; 1º = 60′ (алпыс минут), 1′= = 60′′ (алпыс секунд). Сонымен 1º= 60′ =3600′′.

**Іргелес бұрыштардың** бір қабырғасы ортақ,ал екінші қабырғалары бір түзу құрайды.

ABC жәнеCBD, немесе DBC жәнеABD – іргелес бұрыштар (3-сурет).



3-сурет

Іргелес бұрыштардың қосындысы 180º тең. Олардың біреуі сүйір бұрыш болса, екіншісі доғал болады. ABC +CBD =180º.

**1.2. Түзулердің орналасу жағдайлары**

Берілген екі түзудің ортақ нүктесі болса,онда олар осы нүктеде қиылысады дейді.

Ортақ нүктелері болмайтын түзулер **параллель** түзулер деп аталды.

Екі  және b түзулерін үшінші  түзуі қиып өтеді делік (4-сурет). Берілген бұрыштардың атын есте сақтау қажет:

|  |  |
| --- | --- |
| 8  7  6  5  4  3  2  1  *c*  *b*  *a*  4-сурет | (3; 6); (4; 5); (2; 7); (1; 8) – **айқыш бұрыштар**;  (1; 5); ( 2; 6);( 3; 7); (4; 8) – **сәйкес бұрыштар**;  (3; 5); ( 4; 6);(1; 7); (2; 8) – **біржақты бұрыштар**. |

Түзулердің параллельдігін || символы арқылы белгілейді, мысалы а және b түзулері параллель болса, онда оларды былайша жазады: а || b (5-сурет).

**Аксиома**. а түзуінің бойында жатпайтын В нүктесі арқылы а түзуіне параллель бір ғана b түзуін жүргізуге болады.



5-сурет

5b-суретінде параллель а және b түзулерін үшінші с түзуі қиып өткен. Сонда төменгі теңдіктер орындалатынын **ұмытпаған жөн**:

1. Сәйкес бұрыштар өзара тең: 1=5; 2=6;3=7;4=8.
2. Айқыш бұрыштар өзара тең: 3 =6;4 =5; 1 =8; 2 =7.
3. Біржақты бұрыштардың қосындылары 180º тең.

Есеп шығару барысында осы шарттардың біреуі орындалса берілген түзулер өзара параллель болады деп қорытындылайды.

**1-есеп.** 5b суретінде 1 = 150º болсын, қалған бұрыштардың мәнін табыңыз.

Шешуі. 1=4 =5 =8 =150º.

1+2 =180º; 2 =180º−150º = 30º. Сондықтан 2 =3 =6 =7 = 30º.

**2-есеп.** Іргелес бұрыштың біреуі екіншісінен 5 есе үлкен, осы бұрыштарды табыңыздар.

Шешуі. Бірінші бұрышты α арқылы белгілесек, екінші бұрыш 5α болады. Сонда α+5α= =180°, α = 30º, екінші бұрыш 5α =150°.

**3-есеп.** Сыбайлас бұрыштардың қатынасы 2:7. Осы бұрыштарды анықтаңдар.

Шешуі. 180°-ты 9-ға бөліп бір бөліктің мәнін табамыз: 180°:9 = 20°.Ендеше бұрыштың кішісі 20°= 40°, ал іргелес бұрыш 70° = 140°.Tексеру: 40:140 = 4:14 = 2:7.

**4-есеп.** АОВ бұрышы 120°. О төбесінен жүргізілген екі ОD және ОС сәулесі осы бұрышты 1:2:3 қатынасында бөлген. Осы бұрыштардың мәндерін табыңыздар.

|  |  |
| --- | --- |
| 6-сурет | Шешуі (6-сурет). Барлық бөліктер саны 6. 120°:6 = 20°, бұл 1 бөліктің мәні.  Сонда AOD = 20°, DОС = 20° = 40°, COB = = 30° = 60°.  Тексеру: 20°:40°:60° = 1:2:3. |

**14-дәріс**

**Төртбұрыштар: параллелограмм, тіктөртбұрыш, ромб, квадрат. Олардың қасиеттері Трапеция. Негізгі элементтері. Фалес теоремасы. Үшбұрыш пен трапецияның орта сызықтарының қасиеттері**

**Параллелограмм**

**Параллелограмм** деп қарама қарсы екі қабырғасы тең және параллель болып келген төртбұрышты айтады.

**Параллелограмның қасиеттері** (52-сурет):

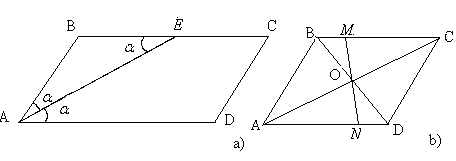


52-сурет

1. BC||AD және BC = AD – бұл анықтамасы бойынша.
2. AB||DC және AB = DC.
3. A =C, D =B − қарма қарсы бұрыштары өзара тең.
4. AO = OC, BO = OD − диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.
5. ABD =CBD, ABC =ADC − диагоналы параллелограмды тең екі үшбұрышқа бөледі.
6. AOD =COВ, AOВ =COD.
7. A+D =C+B =1800.
8. О нүктесі арқылы жүргізілген MN, KL қесінділері осы нүктеде тең екі бөлікке бөлінеді.
9. Бір бұрышының биссектрисасы тең бүйірлі үшбұрыш қияды.
10. Қабырғаның бойындағы бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр болады.
11. Бір төбесінен қабырғаларына түсірілген екі биіктіктің арасындағы бұрыш параллелограмның бір бұрышына тең болады.
12. Параллелограмның қабырғаларының орта нүктелері тағы да бір параллелограмның төбелері болады.
13. Периметрі P= 2(AB+AD)
14. Ауданы S= a
15. AC2+BD2= 2(AB2+AD2).

Осы қасиеттерді дәлелдеуді оқушылардың өздеріне тапсырамыз.

**1-есеп.** ABCD параллелограмының А бұрышының биссектрисасы BC қабырғасын E нүктесінде қияды. EC = 7см, AB = 5см. Параллелограмның периметрін табыныз.



53-сурет

Берілгені (53а-сурет): ABCD − параллелограмм, AE – биссектриса, AB = 5см, EC = 7см. P = 2(AB+AD) табу керек.

Шешуі. BEA =DAE. Ендеше BE = BA = 5см, AC = 5+7= 12; P = 2(5+12) = 34.

Жауабы. 34см.

**2-есеп.** Параллелограмда периметрі 60см, қабырғаларының қатынасы 3:5. Параллелограмның қабырғаларын табыңыздар.

Жауабы. 12см, 20см.

**3-есеп**. ABCD параллелограммында диагональдары О нүктесінде қиылысады. Осы нүктеден жургізілген кез келген MN кесіндісі өзара тең екіге бөлінетінін дәлелдеңіз. Осы қасиетті пайдаланып, BOM = 30, OBM :BMO = 3:7 болғанда бұрыш OND неше градус болатынын анықтаңыздар.

Берілгені (53b-сурет): ABCD – параллелограмм (BC||AD), O – диагональдарының қиылысу нүктесі, O∈MN, BOM = 30, OBM :BMO = 3:7. OND табу керек:.

Шешуі: OBM +BMO +BOM = 180,

OBM +BMO = 180−30=150;

150:10 = 15.

Сондықтан, OBM =35= 45, BMO = 75=105, BMO = DNO, себебі BO = OD, MBO =DNO − параллель BC және AD түзулерін BO түзуі қиғандағы айқыш бұрыштар, BOM = DON вертикаль бұрыштар, сондықтан:

1) OM = ON; 2) OND =OMB = 105.

**Теорема**. Параллелограмның диагональдарының квадраттарының қосындысы қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең болады.

Дәлелі (52-сурет). Косинустар теоремасы мен A+D =180болғанда,

cos(180−A) = −cosA болатын ескереміз.

ABD ⇒ BD=AB+AD−2ABDA;

ACD⇒ AC=AD+DC−2ADCD = AD+DC+2ADCA.

Осы теңдіктерден: BD+AC=AB+AD+BC+CD= 2(AB+AD).

* 1. **Ромб**

Барлық қабырғалары тең параллелограмды **ромб** дейді (54-сурет).

1. Параллелограмның барлық қасиеттері ромбыда бар.
2. Ромбының диагональдары қарама-қарсы бұрыштардың биссектрисасы болады.
3. Ромбының диагональдары өзара перпендикуляр болады.
4. Ромбыға іштей шеңбер сызығу болады.

**Ескерту.** Жоғары 4 қасиетінің бірі бар төртбұрыш ромб болады.

|  |  |
| --- | --- |
| 54-сурет | 1. AB=BC=CD=DA; 2. AC BD; 3. ∆BAC = ∆DAC,BCA =DCA; 4. h=BE=BF; 5. AC+ BD= 4AB; 6. r = – іштей сызылған шенбердің радиусы. |

**1-есеп.** Ромбының қабырғасы 17см, бір диагоналі 16см. Екінші диагоналі мен ауданын, биіктігін табыңыздар.

Берілгені (54-сурет): ABCD – ромб; AB = 17см, BD =16см. Табу керек: AC, h, S.

Шешуі. BO = BD:2 = 8см, AO =см, AC = 30см, S = hD;

S =см; h = 14см.

Жауабы. 30см; 240см2; 14см.

**2--есеп.** Рoмбының қабырғасы 12см, биіктігі қабырғасын тең екі бөлікке бөледі. Оның диагональдарын, ауданын, бұрыштарын табу керек.

Берілгені: ромб, AB = 12см, AE = ED = 6см. Табу керек: BD, AC, S, A, B.

Шешуі (54-сурет). AE = ED болғандықтан BD = AB = 12см. AC+BD= 4AB; AC+12= 42; AC = 12см.

ABD – тең қабырғалы үшбұрыш. Ендеше A= 600; B = 180− 60=120.

S =см.

Жауабы. 12см; 12см; 72см2; 60; 120.

**3-есеп.** Ромбының ауданы 12см, диагональдарының қатынасы 2:3 тең. Диагональдарының және қабырғаларының ұзындықтарын табу керек.

Берілгені: BD:AC = 2:3; S = . Табу керек: AC, BD, AB.

Шешуі (54-сурет). ; BD=16, BD = 4cм; AC = 6cм,

4AB= AC+ BD 4AB= 36+16 = 52; AB= 13; AB =cм.

Жауабы. AC= 6см, BD = 4см, AB=cм.

**4-есеп.** ABCD – ромб, AC = 24см, BD = 18см. Ромбының периметрін, биіктігін табыңыздар.

Шешуі (54-сурет). AO = 12см, BO = 9см, AB =см, P= 4AB=

= 45 = 60см. Ромбының ауданы

S =см; S = AB; h = S : AB = 216:15=14,4см.

Жауабы.60см; 14,4см.

* 1. **Тік төртбұрыш**

Бір бұрышы тік болып келген параллелограмды **тік төртбұрыш** деп атайды.

Анықтамадан тік төртбұрыштың қалған бұрыштары да 90-қа тең болатыны шығады. **Есте сақтаған жөн**: параллелограмның барлық қасиеттері тік төртбұрышта да қайталанады.

**Қосымша қасиеттері:**

1. тік төртбұрыштың даигональдары өзара тең болады;
2. тік төрбұрышқа әр уақытта сырттай шеңбер сызуға болады. Оның диаметрі тік төрбұрыштың диагоналына тең, ал центрі диагоналдарының қиылысу нүктесі;
3. қабырғалары әр түрлі болып келген тік төртбұрышқа іштей шеңбер сызуға болмайды.

**1-есеп.** Тік төртбұрыштың диагоналы 6см, бір қабырғасы 12 см, oсы төртбұрыштың периметрін анықтау керек.

Шешуі (55-сурет). АD =12, ВD =6, Р = 2(АВ+АD) − ?

АВ = =  =  = 6, Р= 36см.

Жауабы. 36см.

|  |  |
| --- | --- |
| 55-сурет | **2-есеп.** Тік төртбұрыштың периметрі 60см, қабырғаларын қатынасы 2:3. Қабырғаларының ұзындығын анықтау керек.  Шешімі (55-сурет). 2(AB+AD) = 60, AB : AD =2:3, AB + AD = 30, AB =.+AD = 30, =30, AD =18cм, AB =12cм. |

Жауабы. 12см, 18см.

**3-есеп.** О-тік төртбұрыштың диагональдарының қиылысу нүктесі. АОВ үшбұрышының ауданы 4,5см. Тік төртбұрыштың ауданын табыңыз.

Шешімі (54-сурет). Параллелограмның диагональдары аудандары өзара тең 4 үшбұрышқа бөлетінін білеміз. Ендеше S = S = 4,5 = 18см.

Жауабы. 18см.

**4-есеп**. АВСD тік төртбұрышында А төбесінен бастап әр қабырғасы АА: АВ=3:1 қатынасында бөлінген (ВВ: ВС= 3:1, СС: СD=3:1, DD: DА=3:1). Пайда болған АВСD төртбұрышымен берілген төртбұрыштың аудандарының қатынасын табыңыз.

|  |  |
| --- | --- |
| 56-сурет | Шешуі (56-сурет). АВ = а, ВС = b болса, онда АА= СС= =, ВА= DС=а, ВВ=DD=b, ВС=DA=. Пайда болған 4 тікбұрышты үшбұрыштардың ауданы . |

Ендеше S=; .

Жауабы. 5:8.

* 1. **Квадрат**

**Квадрат** деп бір бұрышы 90-қа тең ромбыны атайды.

Квадратта параллелограмм, ромб және тік төртбұрыштың барлық касиеттері бар. Қосымша қасиеті: квадраты іштей, немесе сырттай шеңбер сызуға болады. Олардың диаметрлері квадраттың қабырғасына, немесе диагоналына тең.

|  |  |
| --- | --- |
| 57-сурет | **1-есеп.** АВСD – квадрат, қабырғасы 4см. Квадратты іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустарының көбейтіндісін табу керек.  Шешуі. 2r = 4см, 2R = 4. Ендеше r ∙R =. Жауабы. .  **2-есеп.** Қабырғасы 6см квадратың төбелерінен катеттері 2см-ден 4 тік бұрышты үшбүрыш қиылып алынған. Пайда болған 8 бұрышты фигураның және квадраттың аудандарының қатынасын табыңыздар. |

Шешуі (57-сурет). АВСD – квадрат, АВ = 6см, АА= ВВ = СС =...= DD= АА= 2см. Квадраттың ауданы 36см2; 4 өзара тең үшбұрыштың ауданы см. Сегіз бұрыштың ауданы 36−8 = 28см. Ендеше 28:36 = 7:9.

Жауабы. 7:9.

* 1. **Трапеция**

Екі қабырғасы параллель басқа екі қабырғалары параллель емес төртбұрышты **трапеция** деп атайды (58-сурет).

Параллель қабырғалары трапецияның **табандары**, параллель емес қабырғалары **бүйір қабырғалары** деп аталады.



58-сурет

АС және ВD – **дагональдары**,табандарының ара қашықтығы трапецияның **биіктігі** (58а-сурет). ВDАD, ВD=h – биіктік. Бүйір қабырғаларының орта нүктелерін қосатын сызықты трапецияның **орта сызығы** дейді. АЕ = ЕВ және СF = FB болса, онда EF – **орта сызық**.

**Теорема 1.** Орта сызық табандарының қосындысының жартысына тең және табанына параллель болады.

Берілгені: АВСD – трапеция, EF – орта сызық.

Дәлелдеу керек: 1) EF = ; 2) EF||АD||ВС.

Дәлелі. АСЕҒ = 0 болса, онда ЕО = және ОҒ =.

Сондықтан ЕО+ОҒ = ЕҒ = .

Үшбұрыштың орта сызығы табанына параллель болатынын білеміз. О нүктесінен трапецяиның табанына бір ғана параллель түзу жургізуге болады.Сондықтан ЕҒ||ВС||АD. Теорема дәлелденді.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 59-сурет | **1-есеп.** АВСD (АD||СВ) трапециясының орта сызығы 7,5см, табандарының қатынасы 2:3. Трапецияның табандарын табыңыздар.  Берілгені (59-сурет): ЕҒ – орта сызығы, ВС:АD = 2:3. Табу керек: ВС = x, АD = y.  Шешімі: x:y = 2:3; ; x+y=15; , , y = 9, x = 6. | |
| Жауабы. АD = 9см, ВС = 6см. | | |
| **2-есеп.** АВСD тең бүйірлі трапеция (АD||ВС). АЕ биссектриса ВС табаның 5см және 3см бөліктерге бөлген. Екінші табаны 14см. Трапецияның биіктігін табыңыздар.  Шешуі (60-сурет). АЕ – биссектриса, ВЕ = 5см,  ЕС = 3см, АD = 14см, ВК = h – биіктікті табу керек.  КАЕ =ВАЕ, ендеше ВЕА =ЕАК.  ∆АВЕ – тең бүйірлі. АВ = ВЕ = 5, ВС = 8см. | | 60-сурет |

ВКАД,СМАД болса, АК==3.∆АКВ-дан h

Жауабы. 4см.

Тең бүірлі трапецияға байланысты есептер шығарғанда төмендегі байланыстар мен тұжырымдарды **есте сақтап, пайдаланған жөн**.

1. Тең бүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштары және диагональдары өзара тең болады: МN = LK, KM = LN, (58b -cурет).
2. Егерде АС диагоналы А бұрыштарының биссектрисасы болса, онда АВ=ВC=CDболады.
3. Тең бүйірлі трапецияны сырттай шеңбер сызуға болады. Оның центрі бүйір қабырғасының ортасы арқылы жүргізілген перпендикуляр мен табандарының орта нүктелері арқылы жүргізілген түзудің қиылысу нүктесі болады.

**3-есеп.** Тең бүйірлі АВСD трапециясының қабырғалары см. Оны сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңыздар.

|  |  |
| --- | --- |
| 61-сурет | Шешімі (61-сурет). АВСD трапеция, АВ = СD =5,  BC = 6см, AD = 8см, R = x, CE = ED, EFCD болсын.  BK=; AK;  BKAD, BM = MC, AN = ND. CF =FD = R, FN = t десек, MF = 7 − t болады.  FND  R= FN+ ND= t+ 4, |

FMC  R= FM+ MC= (7 − t)+3, осылардан t+16 = 49 −14t + t+9, 14t = 42, t = 3.

Ендеше R= t+16 = 9+16 = 25; R = 5.

Жауабы. 5см.

**4-есеп**. Тең бүйірлі АВСD трапециясының диагоналы бүйір қабырғасына перпендикуляр (АССD). С дан жүргізілген перпендикуляр АD табанын ұзындықтары 12,8см және 7,2см екі бөлікке бөлген. Трапецияның қабырғаларының ұзындықтарын тап.

Шешімі (62-сурет). ABCD – трапеция, BC║AD, ACCD, CEAD; AE = 12,8см; ED= =7,2см;

АВ=CD; AD=20cм; CE=AED=12,8,2;

|  |  |
| --- | --- |
| 62-сурет | CE=; CE=9,6;  CD ==  АB= CD = 12. ; BC = 20−14,4 = 5,6;  CD-ны табудың жеңіл түрі:  CD= EDD = 7,20 = 72= 36=12; CD=12.  Жауабы. 12; 5,6; 12; 20. |

**5-есеп.** Тік бұрышты АВСD () трапециясының сүйір бұрышы 30, CD =20, ВС қабырғасы АD-дан 3 есе кіші. Трапецияның АВ, ВС, АD қабырғаларын, ВСD бұрышын, биіктігін, СD қабырғасының бойындағы ішкі бұрыштарының биссектрисалары жасаған бұрышты табыңыздар.

|  |  |
| --- | --- |
| 63-сурет | Шешуі (63-сурет). СЕАД. Сонда  h = CE = ; h = BA = 10;  ED = CD cos30= 20; AD=BC+ED =BC+30;  AD = 3BC; BC +30 = 3BC;BC =15см, AD = 15+30 = 45;  AD = 45cм.ВСD = 90+60=150; |

BCD+ EDC=150+30=180. Ендеше COD=.

Жауабы. см; 15см; 45см; 1500; 900.

**Теорема 2.** Егерде трапецияның табандарының қосындысы бүйір қабырғаларының қосындысына тең болса, онда оны іштей шеңбер сызуға болады.

Бұл теорема: шеңберді сыртай сызылған ABCD төртбұрышының қасиетінің салдары: AB+CD=BC+AD.

**Теорема 3.** ABCD трапециясында AC және BD диагоналы О нүктесінде қиылысқан. Осы нүктеден табандарына параллель жүргізілген түзу бүйір қабырғаларын E және F нүктесінде қиса, онда EO = OF және EF= (мұнда BC = a, AD = b).

|  |  |
| --- | --- |
| 64-сурет | Берілгені (64-сурет): ABCD – трапеция; AC BC= = a; AD = b; OEF; EF||AD.  Дәлелдеу керек:1) EO = OF; 2) EF =.  Дәлелі: AOD~COВ; AEO~ABC  (1); BEO~BAD ⇒ (2); |

;



Дәл осылай OF= . Ендеше EO = OF; EO+OF = EF = 

**6-есеп.** ABCD трапециясында a = 4cм, b = 8cмболса, онда

EF = см.

**7-есеп.** Тең бүйірлі трапецияның диагоналы бүйір қабырғасына перпендикуляр және үлкен табанымен 30 бұрыш жасайды. Осы трапецияны сыртай сызылған шенбердің радиусы R. Трапецияның қабырғаларын, биіктігін, орта сызығын, ауданын және бұрыштарының мәндерін табыңыздар.

Берілгені (65-сурет): ABCD – трапеция, BC || AD, ACCD, CAD =30, OA = OB = =OC = OD = R.

|  |  |
| --- | --- |
| 65-сурет | Табу керек: A, B, C,D;AB, BC, CD, AD, MN – орта сызығы;CEAD, S, CE = h − ?  O – шенбердің центрі болса, OA=OC=OD=R, AD=2R.  Ендеше ACD = 90болғандықтан R =  Сонымен О нүктесі AD орта нүктесі болады. |

CAD = 30болғандықтан A =D = 60,  ABC =DCB = 120.

Тең бүйірлі DOC үшбұрышында OCD =ODC = 60, осыдан DOC = 60.

Бұл дегеніміз OD = OC = СD = OB = OA = AB = BC = R.

S= 3 S=3

CE = h = CDin60= MN = 

Жауабы. AB=BC=CD=R; AD=2R, h= S; A =D = 60;  ABC = =DCB =120.

|  |  |
| --- | --- |
| 66-сурет | **8-есеп.** Тең бүйірлі трапецияның биіктігі h, ал бүйір қабырғасы сырттай сызылған шеңбердің центрінен 1200 бұрышпен көрінеді. Трапецияның орта сызығын табу керек.  Шешуі (66-сурет): DС ׀׀АВ, АDСВ, О – центр, СОВ=1200 , МNh. DС2а , АВ = 2b болса, орта сызық  табу керек.  А мен С қоссақ, САВ600 болады. |

СКАВ болса, онда СК h, ;



АВ = 2b = AK+KB = а+b = =Жауабы. h.

**9-есеп.** АВСD трапециясында кіші табаны мен биіктігінің көбейтіндісі 80. Кіші табаны мен үлкен табандарының қатынасы 1:4. Трапецияның ауданын табу керек.

Шешуі. BC:AD = 1:4 AD = 4BC.

MNAD, MN = h болсын, BC

Sсм.

Жауабы. 200см.

**15-дәріс**

**Тіктөртбұрыш, параллелограмм, ұшбұрыш, трапеция аудандары Тікбұрышты үшбұрыш. Пифагор теоремасы. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары (синус, косинус, тангенс, котангенс). Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдік**

**Аудан жөнінде түсініктеме**

Математикада қарапайым жазықтық фигураның ауданы жөнінде төмендегідей анықтама береді.

Фигураның ауданы – бұл оң шама, оның сандық мәні мынандай қасиеттерге ие:

1. Тең фигуралардың аудандары тең болады.
2. Егерде фигура бірнеше бөліктерге бөлінген болса, онда осы фигураның ауданы бөліктердің аудандарының қосындысына тең болады.
3. Қабырғасы өлшемнің бірлігіне тең квадраттың ауданы бірге тең.

Мысалы, квадраттың қабырғалары 1см, 1дм, 1м, 100м, 1км болса, онда оның аудандары квадратты сантиметр (см), квадратты дециметр (1дм), квадратты метр (м), бір гектар, квадратты километр.

Төмендегі жазық фигуралардың аудандарын есептейтін формулалардың бәрі мектептегі математика оқулықтарында дәлелденген. Сондықтан формулалардың көбін дәлелсіз келтіреміз.

**Тік төртбұрыштың ауданы**

|  |  |
| --- | --- |
| 99-сурет | Іргелес (99-сурет) екі қабырғаларының ұзындығы а және b тең тік тіктөрбұрыштың ауданы S = a, немесе .  ABCD – тіктөрбұрыш; AB = a, AD = b; диагональдарының арасындағы бұрыш −. |

**Параллелограмның ауданы**

|  |  |
| --- | --- |
| 100-сурет | ABCD параллелограмында В және С төбелерінен AD табанына (және оның созындысына) ВЕ мен СF перпендикулярын жүргізейік (100-сурет).  ABCD – параллелограмм; ВЕAD, СFAD; АЕВ= =DFC. Ендеше олардың аудандары да тең болады. BCFE– тік төртбұрыш. Оның ауданы , EF= = AD. |

Сондықтан, параллелограмның ауданы оның табанын оған сәйкес түсірілген биіктіктің көбейтіндісіне тең: .

**Ескерту**. AB = a, AD = b, ВЕ , ВМСD, ВМ, АС, , АОВ арқылы белгілесек, тағыда параллелограмның ауданын есептейтін бірнеше формула шығады:



**Үшбұрыштың ауданы**

АВС үшбұрышын ABCD параллелограмына дейін толықтырайық (101-сурет). ABCD параллелограмы өзара тең екі үшбұрыштан тұрады, ендеше .

|  |  |
| --- | --- |
| 101-сурет | СЕАВ, СЕ, АВ =с. ABCD параллелограмының ауданы АВ. Сондықтан, .  Үшбұрышта үш биіктік болатынын ескерсек: . Үш формуланы алдық. |

АЕС – тік бұрышты үшбұрыш. СЕ =АC⋅sin A=bA. Сонда .

Басқа екі жағдайды қарастырып мынандай формулаларды аламыз:



АВС үшбұрышына косинустар теоремасын пайдаланып

ВС=АВ+АС− 2АВcosA

тендігінен арқылы sinA есептейміз.







 sinA;

.

Бұл **формуланы** ертедегі грек математигі **Геронның** атымен атайды.

АВС үшбұрышы радиусы R шеңберді іштей сызылған болсын (102-сурет).

|  |  |
| --- | --- |
| рис  102-сурет | BC=a, BA= 2R, BAC =BA1C =  , BCA1= =900, диаметр А1В тірелген бұрыш. Тік бұрышты А1СВ үшбұрышында ВС= a = BA1sinA1,немесе a = 2RsinA. Дәл осылай b = 2RsinB, c = 2RsinС.  Осы теңдіктерден кеңейтілген синустар теоремасы шығады:  ; |

sinA ескеріп,  теңдігінен  формуласын аламыз.

Бұл формула үш қабырғасы және сыртай сызылған шеңбердің радиусының мәндері арқылы үшбұрыштың ауданын табуға көмектеседі. Кажет болса, кез келген үшбұрышты сыртай сызылған шеңбердің радиусын табуға болады:  .

**Мысалы**, АВ = ВС = 30см, АС = 48см,R –?

Шешуі: h=18см, см2, R = см.

Жауабы. 25см.

|  |  |
| --- | --- |
| рис  103-сурет | АВС үшбұрышының қабырғалары а, b, с және оны іштей сызылған шеңбердің радиусы r болсын (103-сурет). АВС үшбұрышының ауданы АОВ, ВОС және АОС үшбұрыштарының аудандарының қосындысына тең болады.    +.  АВС үшбұрышының периметрін 2р = AB + AC + BC = c+b+ + a белгілесек,  тағы бір тамаша формула шықты. |

Оқу құралымыздың әр жерінде осы формуланы бірнеше рет пайдаландық.

**1-есеп.** Қабырғалары 30см, 30см, 48см болатын үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің радиусын табыңыздар.

Шешуі. р = 54см, тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен табанына жүргізілген биіктік 18см болады. см. Ендеше , r = 8см.

Жауабы. 8 см.

Тағыда бір формула сұранып тұр.

 формуласынан а = 2RsinA, b = 2RsinB теңдіктерін пайдаланып



формуласын аламыз.

**1-есеп.**АВС үшбұрышында AD:DB = 2:1, BE = EF = FC. S қатынасын табу керек.

**Нұсқау.**SS; S1:9.

Жауабы. 1/9.

**Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы**

Тік бұрышты үшбұрышта С=900, гипотенуза с=2R. Ендеше тік бұрышты үшбұрыштың ауданы

.

Егерде А = 300 болса, онда В = 600.

S = .

Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері а, b, h – гипотенузаға түсірілген биіктік, m және n (m+n=c) іштей сызылған шеңбердің жанасу нүктесі бөлген гипотенузаның бөліктері болсын.

Сонда тік бұрышты үшбұрыштың ауданы  формулаларымен есептеледі.

Тік бұрышты үшбұрышта с ескерсек  болады.

CD биіктігі гипотенузаны AD = p, DB = q бөліктеріне бөлсе, CD2 = AD⋅DB= pq;

h= CD =; c = p + q; .

**1-есеп.** Тік бұрышты үшбұрыштың биіктігі гипотенузаны 14,4см және 25,6см бөліктерге бөлген. Үшбұрыштың ауданын есептеңіздер.

1-ші жолы: h2 = AD⋅DB = 14,4⋅25,6; c = 14,4 + 25,6 = 40; h=19,2;

см2.

2-ші жолы: S  см2.

Жауабы. 384см.

|  |  |
| --- | --- |
| 104-сурет | **2-есеп.** Тік бұрышты үшбұрышта CDAB (С = 900); DEAC; DFBC; DE = k, DF =. Үшбұрыштың ауданын табу керек  Шешуі (104-сурет). BC = a, AC = b, CE = , CF = k, CD2= =k+. CDB –тік бұрышты: CD2=СF⋅СB  k+= k⋅a a = CDA – тік бұрышты: CD= CEA  k+=b; b = . |

**2-есеп.**Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері АС, ВС өзара тең, биіктігі h= 10,5см, EF||AB, СО = 4,5см. Төртбұрыш АЕFВ ауданын табу керек.

Шешуі. C = 90, AC = CB, CD = 10,5 см, CO = 4,5см, CDAB, CD∩EF = O.

 90см.

Жауабы. 90см.

**Ромбының ауданы**

|  |  |
| --- | --- |
| рис  105-сурет | ABCD – pомб, AC = d, BD = d – диагональдары; AB = =a – қабырғасы, h – биіктігі , r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.  S = ah = asinB = 2ar= d d.  **Есте болсын**! Ромбының екі биіктігі өзара тең. Ромбыға әр уақытта іштей шеңбер сызуға болады. Шеңбердің диаметрі h. Сондықтан r =. |

**1-есеп.** Ромбының қабырғасы а см, сүйір бұрышы . r–ді табу керек (105-сурет).

h = asin, 2r = asin, r =.

Жауабы. .

Егерде =600, a = 8см, онда

r =см.

**2-есеп.** Ромбының қабырғасы 8см, сүйір бұрышы 600. Ромбыны іштей сызылған шеңбердің сыртының ауданын тап.

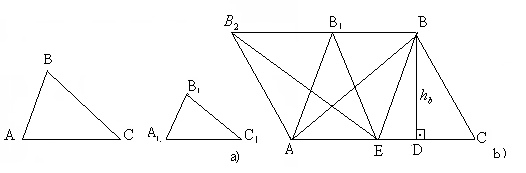
**Ескерту.**; r =

.

Жауабы. .

Төмендегі кейбір **үшбұрыштардыңара қатынастарын** есте сақтаған жөн.

1. Егерде АВС және А1В1С1 ұқсас болса, онда олардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициенттің квадратына тең болады (106а-сурет).



106-сурет

**Ескерту.**АВС ~А1В1С1 үшбұрыштарында сәйкес элементері АВ~ А1В1, h~ h′a, m ~m′ , ~′, r~ r ′, R~ R′, P~ P′− болсын. Сонда

− ұқсастық коэффициенті.

S

S (ABC):(АВC) = k = k.

Spr : p′r′ = k тағы сол сияқты.

1. Егерде 2 үшбұрыштың биіктіктері ортақ немесе өзара тең болса, онда осы үшбұрыштардың аудандарының қатынасы осы биіктіктерге сәйкес қабырғалардың қатынасына тең болады (106b-сурет).



… бұлардың АЕ табаны, BD биіктігі ортақ.

* 1. **Трапецияның ауданы**

**Теорема 1**. ABCD (BC||AD) трапециясында диагональдарының қиылысуынан пайда болған BOC және AOD үшбұрыштарының аудандары  мен болса, онда трапецияның ауданы тең болады.

|  |  |
| --- | --- |
| 107-сурет | Дәлелі(107-сурет). BC||AD, ACBD=0, EFAD, EO= =h, OF=h− болсын және BC=a, AD= b делік. BOC~DOA.Ендеше  S:S=a:b=h,  (1) |

(1)-теңдіктерден  және ;

S==;

AOD–дан S

Осыны ескеріп .

**1-есеп.** ABCD трапециясында S= 27см, S= 48смтең. Трапецияның ауданын табу керек .

Шешуі. см2! Жартылай ауызша шештік.

Жауабы. 147см2.

**Теорема 2.** АВСD трапециясының табан ұзындықтары ажәне b(b>а). Табанына параллель ЕҒкесіндісі трапецияны аудан қатынастары m:n тең екі бөлікке бөлген. Осы кесіндінің ұзындығы.

|  |  |
| --- | --- |
| 108-сурет | Дәлелі(108-сурет). АВСD − трапеция, AD||BC; ВС = =а; АD = b; EF||AD; . EF = x –?  ВN||СD жүргіземіз және ВРАD. Сонда EМ = x–а, АN = b – а; ВЕМ~BAN, BK = h.  КР = h делік;  (1)  . Есептің шарты бойынша |

 (2).

(1)-ден:  (1′)

(2)-ден: .

(1′) теңдікті пайдаланып 

Eндеше  EF=

Егерде EF трапецияның ауданын тең екі бөлікке бөлсе, онда m:n = 1 болады

EF = 

Осы формуланы ретіне қарай тестілік есептерді шешу барысында пайдаланған жөн.

|  |  |
| --- | --- |
| 109-сурет | **2-есеп.** АВСD трапециясында табандарының ұзындығы а және b (b>а). Бүйір қабырғаларының ұзындығы с және d. Трапецияның ауданын табу керек.  Шешуі: (109-сурет). BC||AD, BC = a, AD = b, AB = с, CD = d. ?  BE||CD жүргізсек ВЕ = d, ал АЕ = b−a. Ендеше АВЕ-нің қабырғалары с, d және b−a − белгілі. В төбесінен жүргізілген hb биіктік трапецияның биіктігі болады. |

**3-есеп.** ABCD трапециясында (BC||AD) BC = 4см, AD = 18см, AB = 15см, CD = 13см. Трапецияның биіктігі мен ауданын табыңыздар.

Шешуі (2-ші есептің шешу жолын пайдаланамыз). АЕ = b – a = 18 – 4 = 14см, АВ = c = =15см, BE = CD = d = 13см. Герон формуласымен АВЕ-нің ауданын табамыз.

2р= 42см, p = 21см.

S=см2;

S = 84=см.

Трапецияның ауданы: S= = 132cм.

Жауабы. 12см, 132см2.

**4-есеп.** АВСD трапециясының табан ұзындықтары а және b (b>а), диагональдері АС мен ВD ұзындықтары с және d. Трапецияның биіктігі мен ауданын табыңыздар.

|  |  |
| --- | --- |
| Шешуі (110-сурет). СЕ||BD болса, онда СЕ = d, DЕ = a, AE = b+ а болады.  АСЕ үшбұрышының ауданы ABCD трапеция ауданына тең; биіктіктері бірдей, − орта сызық. Герон формуласын пайдаланып АСЕ үшбұрышының ауданын, биіктігін табамыз. Есеп шешілді. | 110-сурет |

**5-есеп.** АВСD трепециясында (АD||ВС) АD = 15см, ВС = 5см , АC = 16см, ВD = 12см. Трапецияның ауданын табыңыздар.

|  |  |
| --- | --- |
| Шешуі (111-сурет). СЕ||BD жүргіземіз. Сонда АЕ= =20см, АС=16см, СЕ =12см. Герон формуласымен АСЕ үшбұрышының ауданын есептеместен бұрын мынаны байқаймыз:  AE=AC+CE, ендеше АСЕ = 900, | 111-сурет |

см. Жауабы. 96см2.

**6-есеп.** АВСD трапециясында табандары АD = 24 см, ВС = 8см, диагональдары АС = =13см, ВD = 5см. Трапецияның ауданын табу керек.

|  |  |
| --- | --- |
| 112-сурет | Шешуі (112-сурет).  1-ші жолы.СЕ||ВD. Сонда СЕ = ВD = 5; АЕ = АD + +DЕ = 24 + 8 = 32.  SACE = SABCD.  P = P−13 = ; |

P – 32 = ; P−;

P(p−a)(p−b)(p−c) = 

=

;

S =  S = 64∙5 = 16·5 = 80см2.

2-ші жолы. BE = CF = h – биіктік; AE=x, AF = x+8; ED = 24−x.

AC² − AF² = BD² − ED²; 13² − (x+8) ²= −(24−х) ²,х = 4, h= 5.

SABDC  = (BC+AD)⋅h = 80см2.

Жауабы. 80см².

**7-есеп.**АВСD трапециясының ауданы 384см, АС мен ВD дигоналы О нүктесінде қиылысқан АОD үшбұрышының ауданы 216см. ВОС үшбұрышының ауданы қанша.

**Нұсқау.**.

Жауабы. 24см.

**8-есеп.**АВСD трапециясының ауданы 338см, ВОС үшбұрышының ауданы 32см. АОD үшбұрышының ауданы тап.

Жауабы. 162см.

**9-есеп.**О нүктесі АВСD трапециясының АС және ВD диагональдарының қиылысу нүктесі. ВОС және АОD үшбұрыштарының аудандары 48см және 108см. ВС:АD қатынасын табыңыздар.

**Нұсқау.** Ұқсас үшбұрыштардың аудандарының қатынасы ұқсастық коэффициентінің квадратына тең екенін ескерген жөн.

Жауабы. 2:3.

**Дөңгелектің және оның бөліктерінің ауданы**

Радиусы R шеңберді іштей сызылған дұрыс көпбұрыштың периметрін P әрпімен белгілесек, онда

P= na = n

болады, мұнда n – қабырғалap саны, ал a− бір қабырғасының ұзындығы (113а-сурет).

|  |  |
| --- | --- |
| риса) | рисb) |
| 113-сурет | |

АOA үшбұрышының қабырғалары OА = OA= R, АOA=,

АOC = , OC  АA.

S

Дұрыс көпбұрыш АA…A ауданы

S = .

Егерде қабырғалардың санын шексіз көбейтсек, , OC  R, S=S, S – дөңгелектің ауданы (дәлелі анализ бастамалары курсында).

Сонда S = –дөңгелектің ауданы.

1-қа сәйкес сектордың ауданы  болады, ал  сәйкес сектордың ауданы

S.

MnN сегментінің ауданын MnNO сектордың ауданынан MON үшбұрышының ауданын шегеру арқылы табады (113b-сурет).

S

Мұнда MON =.

**1-есеп.** Орталық бұрышы 30, радиусы 6cм болатын сектор мен оған сәйкес сегменттің аудандарын есептеңіздер.

Шешуі. R = 6 cм, = 30.

1. Scм
2. Scм2, S

Жауабы. см2;  см2.

**2-есеп.** Радиусы 3см шеңберге іштей дұрыс үшбұрыш сызылған. Осы үшбұрыштың сыртындағы дөңгелектің бөлігінің ауданын анықтау керек.

Шешуі. Sдөңгелек =  = 9cм Іштей сызылған дұрыс үшбұрыштың қабырғасы . Ендеше S.

Іздеген ауданымыз Sдөңгелек − S = 9−. Жауабы. 9

**2-семестр**

**1-дәріс**

**Бұрыш пен доға ұғымдарын жалпылау. Доға мен бұрыштардың градустық және радиандық өлшемдері. Бірлік шеңбер. Сандық аргументтің тригонометриялық функциялары: синус, косинус, тангенс, котангенс. Олардың жұп, тақ және периодтылығы**

**Бірдей аргументті тригонометриялық функциялардың арасындағы негізгі тригонометриялық теңбе-теңдік. Келтіру формулалары**

Еске түсірейік. Қозғалмалы ОА сәулесі сағат тілі бағытына қарсы бағытта толық айналымының  бөлігіне тең бұрылыс жасағанда пайда болған бұрыштың мәнін бір градус , ал бір градустың  бөлігін бір минут , бір минуттың  бөлігін бір секунд  деп атайтынын білеміз. Сонымен .

Сол сияқты ұзындық салмақ, көлемнің өлшемдері де әр түрлі болатыны белгілі.

Математикада ОА сәулесі О нүктесінен сағат тілі бағытына қарсы айналудан пайда болған бұрышты (доғаны) оң бағытты, ал сағат тілі бағытымен айналудан пайда болған бұрышты (доғаны) теріс бағытты деп атап, оларға сәйкес бұрыштық мәндердің алдына  плюс немесе  минус таңбаларын жазу қабылданған.

ОХ өсінің бойынан бір А нүктесін белгілеп ОА радиусымен толық шеңбер сызайық (-сурет).

Анықтама. АВ доғасының ұзындығы ОА радиусының ұзындығына тең болса, онда оған сәйкес АОВ орталық бұрышының мәнін бір радиан деп атайды.

Сонымен, радиан дегеніміз бұрыштың жаңадан еңгізіліп отырған бірлік өлшемі. Соны ескеріп радиан деген белгіні көбінесе жазбайды. Мысалы  радианның орнына  деп жазады.

Градустық өлшемдердің радиандық мәндерін анықтауды қарастырайық.

Шеңбердің ұзындығы -ге тең. Осында  неше рет болатынын білу үшін -ді -ге бөлеміз: ол  радианға тең болады. Сондықтан

 радиан,

 радиан,

 радиан,

 радиан,

 радиан болатынын байқаймыз.

Сонымен, бұрыштың градустық мәні  болса, онда осы бұрыштың радиандық мәні

 радиан (1)

Ал осы формуладан  радианға сәйкес келетін бұрыштың градустық мәні төмендегі формула арқылы анықталады:

 (2)

Жаттығулар.1. Бұрыштардың берілген градустық мәндері бойынша оларға сәйкес радиандық мәндерін табыңыздар: 

Шешуі. 1)  рад.;

2)  рад.;

3)  рад.;

4)  рад.;

5)  рад.;

6)  рад.;

7)  рад.;

8)  рад.

2. Бұрыштардың радиандық мәндері бойынша оларға сәйкес бұрыштардың градустық мәндерін анықтаңыздар:1 рад.;  рад.;  радиан.

Шешуі. (2)-ші формула бойынша:

1)  болса, онда 

Сонымен, 1 радианның градустық мәні -ке тең екен.

2)  рад. болғанда 

3)  рад.; 

4)  рад.; 

5)  рад.; 

6)  рад.; 

7)  рад.; 

8)  рад.; 

9)  рад.; 

10)  рад.; 

11)  рад.; 

12)  рад.; 

**7.2. Тригонометриялық функциялардың анықтамалары**

Тік бұрышты ХОУ координат жүйесінің бойынан радиусы  тең шеңберді алайық. Осындай шеңберді бірлік шеңбер деп атайды. ОХ өсінің бойындағы А және С нүктелерінің координаталары А(1;0), С(-1;0), ал оу өсінің бойындағы В мен Д нүктелерінің координаталары В(0;1), Д(0;-1) болатынын білеміз ( сурет).



Абсцисса өсіндегі ОА радиусы осы өспен оң бағытта мәні -ға тең  бұрышын жасасын. Шеңбердің бойында -ға сәйкес бір ғана  нүктесі болады. Осы нүктенің абсциссасы  және ординатасы  болсын.

Анықтамалар. 1. -нің мәнін  бұрышының синусы деп, ал -нің мәнін  бұрышының косинусы, синустың косинусқа қатынасын -ның котангенсі деп атайды.

Жазылуы:  оқылуы: синус альфа,

, оқылуы: косинус альфа,

оқылуы: тангенс альфа

Жазылуы:  оқылуы котангенс альфа.

Есте сақтайық. Қосымша тағыда екі функция математикада жиі қолданылады. Синусқа кері функция косеканс, ал косинусқа кері функция секанс деп аталады.

Жазылуы:  оқылуы: косеканс альфа,  оқылуы: секанс альфа.

-суреттегі  үшбұрышынан Пифагор теоремасын пайдаланып  теңдіктегі  мен  орнына  және  қойсақ, тригонометриялық негізгі теңбе-теңдік деп аталатын өрнекті аламыз:

 (1)

Осы теңдіктің екі жағын , сонан соң  бөліп, өте жиі қолданылатын тағы да қосымша теңдіктер алынады:

 (2)

 (3)

Тангенс пен котангенсті өз ара көбейтіп

 (4)

Теңдігін алдық. Бір бұрыштың тангенісі мен котангенісінің көбейтіндісі әр уақытты 1-ге тең. (немесе олардың сандық мәндері өзара керісінше болады).

**7.3. Бір функцияның берілген мәні бойынша қалған тригонометриялық функциялардың мәндерін анықтау**

Абсцисса және ордината өстегі бірлік шеңберді 4 ширекке бөледі. Ендеше бұрыштың қай ширекте орналасуына байланысты, жоғарыда аталған функциялардың мәндерінің таңбасы да әр түрлі болып келеді (сурет).

Синус пен косинустың абсолют шамасы 1-ден аспайтынын (себебі тік бұрышты үшбұрыштық катеттері гипотенузадан әр уақытта кіші болады) және олардың таңбаларын ескеріп, бір функцияның мәні арқылы басқа қалған 5 функцияның мәндерін анықтайтын жаттығулар.

1. Берілгені:  Табу керек:  Шешуі.

Негізгі теңбе-теңдіктен 







Енді  болсын. Сонда -ті пайдаланып  Есептің шарты бойынша . Екінші ширекте косинустың таңбасы теріс, сондықтан, 



Жауабы. 

Есеп. 





Тригонометриялық функциялардың басқа мәндерін анықтаңыздар.

2. Берілген: 

Табу керек: 

Шешуі.

 ендеше  Негізгі теңбе-теңдіктен . Синустың 4-ші ширектегі таңбасы «минус». Енді  пайдаланамыз: 

Котангенс тангенске керісінше:



Егерде  болғандағы басқа бес функцияның мәндерін анықтаймыз.

Жаттығулар. Мәні және таңбасы белгілі функциялар берілген. Қалған функциялардың мәндерін табыңыздар.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

3-есеп. Берілгені: 

Табу керек: 

Шешуі. 







Жауабы. 



Жалпы түрде: егер  белгілі болса, онда:





Мысал. 

Табу керек: 

Шешуі.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

4-есеп. Берілгені 

Табу керек: 

Шешуі

1) 

2) 

3) 



4) 

5) 

Жалпы түрдегі жауабы:





Енді тригонометриялық функциялары бар өрнектерді ықшамдау және теңбе-теңдіктерді дәлелдеуге арналған жаттығуларды қарастырайық.

1. Өрнектерді ықшамдаңыздар

1.1. 

Мұнда бөлшектің алымындағы өрнектерді топтпдық, негізгі теңбе-теңдікті пайдаланып

одан  таптық, ұқсас мүшелерін жинастыру нәтижесінде, оны  алмастырдық.

Бөлшектің алымы мен бөлімін  қысқартып, синус пен косинустың қатынасын тангенс альфамен ауыстырып жаздық. Жауабы: .

1.2. 

Шешуі. Бөлшектің бөліміндегі өрнектегі котангенстің орнын  теңдігімен алмастырып, әрі қарай ықшамдап жазайық:





Жауабы: .

Ескерту. Кейде тригонометриялық өрнектің мәнін қосымша шартты пайдаланып табуға тура келеді. Мысалы, 1.2. өрнектің мәнін  болғанда анықтау талабы қойылса, онда алдымен өрнекті түрлендіргеннен кейінгі алынған  орнына -ті қойған тиімді болады.

* 1. Өрнекті ықшамдаңыз: 

Шешуі. 1) негізгі тригонометриялық теңбе-теңдікті түрлендіреміз:  (теңдіктің екі жағын үшінші дәрежеге шығарамыз).

Мына  түрлендіруді пайдалану тиімді. Мұнда 

Ендеше 

 Сонымен

 Жауабы 1.

* 1. теңбе-теңдікті дәлелдеңіздер:



Дәлелдеуді. Бөлшектің алымына 1-дің орнына  қойып,  өрнегі толық квадратпен алмастырамыз 

Сонда 

Осыны дәлелдеуіміз керек еді.

1.5. 

Дәлелдеуі. Теңдіктің сол жағын топтап түрлендірген тиімді:



1.6. 

Дәлелдеуі. 

**2-дәріс**

**Тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырымын көбейтіндіге және керісінше түрлендіру. Универсалды ауыстыру формулалары**

**Кері тригонометриялық функциялар туралы ұғым. Негізгі тригонометриялық теңдеулерді шешу**

**. Тригонометриялық теңдеулер**

Анықтама. Белгісіз шама  (немесе ) тригонометриялық функцияның таңбасының ішінде орналасса, онда теңдік тригонометриялық теңдеу деп аталады. Тригонометриялық теңдеудің түбі (шешуі) деп оня қанағаттандыратын белгісіздің мәндер жиынын айтады. Мысалы, -тригонометриялық теңдеулер.  сандар жиыны  теңдеуінің түбірлері, ал  оның түбірі емес, себебі  дұрыс сандық теңдік емес.

Жалпы кез келген тригонометриялық теңдеуді шешудің ортақ формуласы жоқ. Біздер орта мектеп оқу бағдарламасындағы жалпы талапқа сәйкес, жиі пайдаланылып жүрген деңдеулерді, мүмкіншілігінше топқа бөліп, олардың шешу жолдарын қарастырамыз.

Қарапайым тригонометриялық теңдеулердің жаопы шешімінің формулалары.









Мына теңдеулердің шешімдерін есте сақтаған жөн









**Есте болсын!**





**Есте болсын!**





**а) Теңдікті нөльге теңеп, сол жағын көбейткіштерге жіктеп шншу жолы.**

Теңдікті шешіңіз. **1-мысал.**

Шешуі. 





1) 





**2-мысал.** Шешуі. 







Немесе 

**3-мысал.** Шешуі. 



1) 



2) 



**б) Алгебралық теңдеуге келтіруге болатын тригонометриялық теңдеулер.**

Төмендегі түрдегі теңдеулер:

 және басқалары  белгілеу арқылы алгебралық теңдеуге келтіріледі.

Теңдеулерді шешіңіз.

**4-мысал.**

Шешуі. 



1) 

2) 

**в) Мына түрдегі теңдеуді біртекті теңдеу дейді:**



 болғанда 

 болғанда 

 (немесе ), себебі  немесе  бір мезгілде нольге тең болмайды.  арқылы белгілейміз.

**5-мысал.**

Шешуі.

Теңдеулердің екі жағын  бөлеміз.

 Сол жағын көбейткіштерге жіктеуге болады:





1) 

2) 

**6-мысал.**

Шешуі. 





1) 

2) 



Ответ. 

**7-мысал.**



Шешуі. 





1) 

2) 

3) 

4) 

Жауабы. 

**8-мысал.**

Шешуі. 





1) 

2) 



Жауабы. 

**9-мысал.**

Шешуі. 







1)  

2)  

**10-мысал.**

Шешуі. 1) 

2) 

 болса, 



1)  

2) 

**11-мысал.**

Шешуі. 







1) 



2) 

 болса, онда 





1) 

2) 

**12-мысал.**



Шешуі.  Ендеше 



 Сондықтан 



;

1) 

2) 



3) 

4) .

**13-мысал.**

Шешуі 

**14-мысал.**

Шешуі. 





**3-дәріс**

* + 1. **Cан тізбегінің ұғымы**

Натурал сан қатарын қарастырайық:

Енді осы қатардың әр нөміріне төменде көрсетілген сандарды кезегімен жазайық:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Сонда тағыда бір жаңадан сан қатары пайда болды. Бұл сәйкестік функция болып тұр, оның анықталу облысы натурал сандар жиыны. Осындай функцияны **сан тізбегі** деп атайды. Натурал сандар саны шектелмеген болса, функция **шектелмеген сан тізбегі**, ал натурал сандар саны шектелген болса, функция **шектелген сан тізбегі** деп аталады.

**1-мысал**. 1 мен 50 арасындағы жай сандар болатын тізбекті жазыңдар.

Шешуі: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Анықталған тізбектің мүшелерінің саны 15 және ол шектелген тізбек.

Анықталу облысы

**2-мысал**. Әр мүшесі 5 және 7 сандарының көбейтіндісіне бөлінетін 1 мен 200-дің арасындағы тізбек мүшелерінің саны нешеу?

Шешімі. Ол тізбек мынадай: 35,70, 105,140,175. Жауабы. 5.

* + 1. **Тізбектердің берілу түрлері**

Жалпы түрде сан тізбегін былайша жазады: тағы сол сияқты, немесе Мұнда:

– тізбектің бірінші мүшесі,

– тізбектің екінші мүшесі,

– тізбектің энінші мүшесі.

Сан тізбегін әртүрлі тәсілдермен анықтауға болады.

Бірінші тәсіл – **аналитикалық тәсіл**. Мұнда тізбек белгілі бір формула арқылы беріледі. Бұл жағдайда тізбектің әр мүшесі оның нөмірі арқылы анықталады. Жазылу түрлері:

т.с.с., – бұлар тізбектің **жалпы мүшелері**.

**3-мысал**. Тізбектің жалпы мүшесі формуласы арқылы берілген. Оның бірінші бес мүшесін жазыңдар.

Шешуі:

Сонымен тізбек 2, 4, 6, 8, 10, ... , 2n, … – жұп сандар тізбегі екен.

**4-мысал**. Тізбектің алғашқы бірнеше мүшелерін жазыңдар.

Шешуі.

тізбегі – тақ сандар тізбегі екен: 1, 3, 5, 7, ...,

**5-мысал**. Тізбек формуласы арқылы берілген. Алғашқы мүшелерін табу керек.

Шешуі.

Екінші тәсіл – рекурренті тәсіл.

Тізбектің анықталуының рекурренті тәсілінде 1) тізбектің бірінші мүшесі (кей кезде алғашқы бірнеше мүшелері) беріледі; 2) тізбектің басқадай кез келген мүшелерін анықтауға мүмкін болатын формула беріледі.

**6-мысал («Фибоначчи сандары»)**. Берілгені

Шешуі.

Сонымен іздеген қатар мынадай екен:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Ескерту. Тараудың басында келтірген мысалымыз шығып тұр.

Үшінші тәсіл – графиктік тәсіл.

Бұл жағдайда тізбек график арқылы беріледі. Графиктегі нүктелердің абсциссалары натурал сандар болып келеді.

Төртінші тәсілде тізбекті сипаттау арқылы береді.

**7-мысал**. тізбегінің әрбір мұшесінде 3 саны, нөмірі қандай болса, сонша рет қайталанады. Бірінші 5 мүшесін жазу керек.

Шешуі.

**Анықтамалар:**

**1.** Егер тізбектің әрбір мүшесі, екіншісінен бастап, алдыңғысынан артық болса, онда ол монотонды үдемелі (немесе өспелі) деп аталады.

**8-мысал**. Жалпы мүшесі формуласы арқылы анықталған тізбек монотонды екенін дәлелдеу керек.

Дәлелі.

Немесе шарты орындалып тұр, тізбек өспелі.

**2.** Егер сан тізбегінің әрбір мүшесі, екіншісінен бастап алдыңғысынан кем болса, онда ол монотонды кемімелі тізбек; n-нің кезгелген мәні үшін тексіздігі орындалады.

**9-мысал**. Жалпы мүшесі формуласымен анықталған тізбек кемімелі болатынын көрсетіңіздер.

Шешуі.  
Олардың айырмасы

Ендеше , . Тізбек кемімелі.

Жаттығулар.

1. Жалпы мүшесі болатын тізбек қандай?

Жауабы. Өспелі тізбек.

1. Жалпы мүшесі болатын тізбек қандай?

Жауабы. Кемімелі тізбек.

1. Жалпы мүшесі . Тізбектің бірінші 6 мүшесін жазыңыздар.
2. Тізбектің жалпы мүшесі Тізбектің бірінші 5 мүшесін жазыңыздар.
3. Тізбек берілген: 1, 4, 9, 16, 25, … жалпы мүшесі қандай?

Жауабы. .

1. Тізбек берілген: 2, 5, 10, 17, 26, … жалпы мүшесі қандай?

Жауабы. +1.

1. Тізбек берілген: 3, 8, 15, 24, 35, …, Жалпы мүшесі қандай?

Жауабы. -1.

1. Тізбек рекурренті формуламен берілген:

Оның бірінші 7 мүшесін жазыңыздар.

**2.2 Арифметикалық прогрессия**

**2.2.1 Анықтамалар, негізгі қасиеттері, формулалар**

**Анықтама.** Мына формула арқылы

анықталған, және берілгін сандар болған сан тізбегін **арифметикалық прогрессия** деп атайды.

Берілген тұрақты сан арифметикалық прогрессияның **айырымы** деп аталады.

**10-мысал**. Бірінші мүшесі 3, айырымы 5 болатын арифметикалық прогрессияның бірінші 5-мүшесін анықтайық.

Шешуі. берілген, формуласынан болғанда Әрі қарай осылайша т.с.с.

Жауабы: 3, 13, 18, 23.

**Ескерту**. Математикада тізбек арифметикалық прогрессия болғанда оның алдына символын (таңбасын) қоюға келісілген. Сонда 10-мысалдың жауабын былайша жазады:

Енді мынаған көңіл аударайық:

,

арқылы жазуға болатынын байқаймыз.

Сонымен берілген бірінші мүше және айырымы бойынша, арифметикалық прогрессияның жалпы мүшесінің формуласы табылды:

(1)

Жалпы түрде қарастырайық:

(2)

Мұнда және осы екі теңдіктен

(3)

Бұл теңдікті арифметикалық прогрессияның негізгі қасиеті деп атайды. Оқылуы: арифметикалық прогрессияның әр мүшесі (2-ші мүшеден бастап) көрші екі мүшенің арифметикалық ортасы болады.

10-шы мысалда

(2-ші) тізбекті ші мүшемен шектеп жазайық

(2’)

Алды мен соңынан бірдей қашықша орналасқан мүшелердің қосындыларын қарастырайық:

Осылайша жалғастырсақ теңдіктері шығады. Бұл арифметикалық прогрессияның 2-ші қасиеті.

Арифметикалық прогрессияда алды мен соңынан бірдей қашықта орлаласқан мүшелердің қосындысы тұрақты саны болады:

(4)

Арифметикалық прогрессияның бірінші мүшелерінің қосындысын 2 түрде жазайық:

Осы бірдей екі теңдікті өзара қосыптүрлендіреік:

,

(5)

Мұнда әр қосынды өзара тең және олардың саны екенін ескердік.

Енді (4) теңдікті пайдаланып тағы да бір формуланы аламыз:

(5’)

және формулалары арқылы арифметикалық прогрессияның алғашқы мүшесінің қосындысын анықтайды.

**11-мысал**. Арифметикалық прогрессияның 3-ші мүшесі 1, 7-ші мүшесі 17. Прогрессияның 1-ші мүшесін, айырырымын, алғашқы 10 мүшесінің қосындысын табыңыздар.

Шешуі. Табу керек:

Осы жүйеден

Жауабы.

**12-мысал**. Арифметикалық прогрессияның 1-ші мен 5-ші мүшелерінің қосындысы 4, 3-ші мен 9-шы мүшелерінің қосындысы -26. Прогрессияның алдыңғы 9 мүшесінің қосындысы неге тең?

Шешуі:

1. жүйе құрамыз

**13-мысал**. Барлығы 3-ке бөлінетін 2 таңбалы сандардың қосындысын табыңыздар.

Шешу. Ең кіші 3-ке бөлінетін 2 таңбалы сан 12, ендеше есептің шартынан деген қорытынды жасаймыз. Ең үлкен 3-ке бөлінетін 2 таңбалы сан 99. Осыдан аламыз. Бізге мүшелер саны белгісіз.

теңдігінен мүшелер саны болатынын анықтадық. формуласынан

Жауабы. 1665.

**14-мысал**. Үшбұрыштың қабырғалары арифметикалық прогрессия құрайтын бүтін сандар, периметрі 15. Қабырғалардың ұзындықтары қандай?

Жауабы 5; 5; 5.

Шешуі. Есептің шартында қабырғалары арифметикалық прогрессия құрайды:

ортаншы қабырғасы болса болады. теңдігінен болады. Немесе

Болатынын ескерсек Енді екендігін көрсетейік (1-сурет).

|  |  |
| --- | --- |
| 1-сурет | Үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің радиусы болса, жанамалары екенін ескереміз.  Сонымен ескеріп |
|  | | |

пайдаланамыз:

арқылыбелгілеп екенін анықтаймыз. Сонымен үшбұрыштың қабырғалары 5,5,5. Үшбұрыш тең қабырғалы болып шықты.

**15-мысал**. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары арифметикалық прогрессия құрайды, ауданы 6 Қабырғаларының ұзындықтары қандай?

Жауабы: 3,4,5.

Шешуі. Пифагор теоремасы бойынша

болса

Сонымен

**16-мысал**. Арифметикалық прогрессияның 1-ші, 3-ші және 8-ші мүшелерінің қосындысы 21. 4-ші мүшесінің мәні қандай?

Жауабы. 7.

Шешуі:

**17-мысал**. Арифметикалық прогрессияның 3-ші мүшесі 8, 7-ші мүшесі 20. Берілген өрнектің мәні неге тең:

Шешуі. жүйені шешіп

анықтаймыз.

Өрнектің мүшелерін ыдыратып жазамыз:

.

Жауабы. 1.

**18-мысал**. Арифметикалық прогрессияның 3-ші, 5-ші және 7-ші мүшелерінің қосындысы 39. Прогрессияның бірінші 9 мүшесінің қосындысы қандай?

Жауабы 117.

Шешімі.

**Жаттығулар**.

1. 11-ге бөлінетін барлық екі таңбалы натурал сандардың қосындысы неге тең?

Жауабы. 495.

1. 13-ке бөлінетін барлық екі таңбалы натурал сандардың қосындысы неге тең?

Жауабы. 364.

1. 9-ға бөлінетін барлық үш таңбалы натурал сандардың қосындысы неге тең?

Жауабы. 55350.

1. 7-ге және 11-ге бөлінетін үш таңбалы натурал сандардың қосынды неге тең?

Жауабы. 8008.

**19-мысал**. АВС үшбұрышының қабырғалары арифметикалық прогрессия құрайды. Үлкен қабырғасы 7 см, бір бұрышы . Қалған екі қабырғасының ұзындықтарын және ауданын анықтау керек.

Жауабы. 3 см, 5 см, 7 см.

|  |  |
| --- | --- |
| -сурет | Шешуі. (-сурет)  Косинустер теоремасы бойынша: |

7-ге бөлеміз.

Екінші мәні есептің шартын қанағаттандырмайды.

Енді Осыларды ескеріп ауданын табамыз.

**P.S.**Егерде Rкерек болса

\*) r-ді табу керек болса

\*) радиустерінің көбейтіндісін табу керек болса:

\*) Радиустердің қатынасы

\*)

және қабырғаларына жүргізілген биіктіктердің қатынасы анықталды.

**20-мысал**. үшбұрышының қабырғаларының ұзындығы арифметикалық прогрессияның қатар 3 мүшесін құрайды. Ортаңғы қабырғасы см, үшбұрышының қабырғалары қандай?

Жауабы. 12, 20, 28.

|  |  |
| --- | --- |
| -сурет | Шешуі. (-сурет)  айырымы болса,  болуы керек |

Косинустер теоремасы бойынша

;

Ендеше

Қабырғалары 12, 20, 28.

Ауданы

Үшбұрышты сыртай және іштей сызылған шеңберлердің радиустері:

**2.3. Геометриялық прогрессия**

**2.3.1. Анықтамасы. Негізгі қасиеттері және формулалары.**

Екінші мүшесінен бастап, әрбір мүшесі өзінің алдындағы мүше мен берілген тізбек үшін тұрақты, нөлден өзгеше бір санның көбейтіндісіне тең болатын сан тізбегі геометриялық прогрессия деп аталады.

Мысалдар:

болса, тізбек геометриялық прогрессия.

болғанда тізбек геометриялық прогрессия болады.

болса тізбегі геометриялық прогрессия.

Мұндағы санын геометриялық прогрессияның еселігі деп

атайды; екенін естен шығармаған жөн.

Геометриялық прогрессияны төмендегі түрде жазуға келісілген:

(1)

Анықтамадан мынандай теңдіктер шығады:

(2)

Осы пропорциялардың кез келген қатар тұрған екі қатынасынан теңдіктер орындалатын байқаймыз.

Прогрессия мүшелері оң таңбалы болғанда соңғы теңдікті былайша жазамыз:

(3)

(3) формуланы математикалық тұжырым ретінде былайша айтады:

оң мүшелі (1) геометриялық прогрессияның, екінші мүшесінен бастап, кез келген мүшесі оның өзімен көршілес мүшелердің геометриялық ортасы болады.

Жоғарыдағы

тізбегімізде

Негізгі қасиет орындалып тұрғанына көзімізді жеткіздік. (2) теңдіктерді төмендегі түрде жазуға болады:

Геометриялық прогрессияның жалпы мүшесінің формуласын

(4)

алдық.

Геометриялық прогрессияның бірінші мүшесін төмендегі түрде жазып

,

оның мүшесінің қосындысын

(5)

ға көбейтеміз

(6)

(5) теңдіктен (6) теңдікті мүшелеп шегерсек мынандай өрнек шығады:

Соңғы теңдіктен бірінші n мүшенің қосындысын анықтайтын формуланы аламыз:

. (7)

Геометрия прогрессияның тағы бір қасиеті мынадай:

. (8)

Мүнда мүшелердің нөмірлерінің қосындысы өзара тең.

21-мысал. 4 сан геометриялық прогрессия құрайды. 2-ші, 3-ші мүшелеріне 1-ді қосып, 4-ші мүшесінен 1-ді шегерсек, пайда болған 4 сан арифметикалық прогрессия құрайды. Бұлар қандай сандар?

Жауабы 1,2,4,8.

Шешуі. Берілгені:

Геометриялық прогрессияның еселігі мен бірінші мүшесін анықтауымыз керек. Арифметикалық прогрессияның негізгі қасиетін ескеріп жүйе құрамыз:

теңдігінен

Ендеше геометриялық прогрессия мүшелері

22-мысал. 4 сан арифметикалық прогрессия құрайды. 1-ші мүшеге 4-ті қосып, 3-мүшеден 2-ні шегеріп, қалған 2-кі мүшелерді өзгертпей өз орнында қалдырсақ, жаңадан құрылған 4 сан геометриялық прогрессия болады. Бұлар қандай сандар?

Жауабы. -2;4;10;16.

Шешуі.

Берілгені

Геометриялық прогрессияның негізгі қасиетін пайдаланып құрамыз:

Пропорцияның қасиеттерін пайдаланып жүйедегі теңдіктерді түрлендіреміз:

(\*)

(\*\*)

Түрлендіріп құрған жүйемізді мына түрге келтірдік:

Бұл жүйенің шешімі:

болғанда

бұл есептің шартын қанағаттандырмайды.

Жауабы. прогрессия

23-мысал.

4 сан арифметикалық прогрессия құрайды 2-ші, 3-ші, 4-ші мүшелеріне 1,6 және 19 сандарын қосып 1-ші мүшесін өзгеріссіз қалдырғанда олар геометриялық прогрессияның мүшелері болады.

Олар қандай сандар?

Жауабы: 4,7,10,13

Шешуі. Берілгені

.

Геометриялық прогрессия мүшелерінен жүйе құрамыз:

Жүйені мына түрге келтірдік:

Бірінші теңдікті (-1)-ге көбейтіп, мүшелеп екінші теңдікке қоссақ ал дан

есептің мазмұнын қанағаттандырмайды.

Жауабы

Геометриялық прогрессия: 4,8,16,32.

24-мысал. 4 сан геометриялық прогрессия құрайды. Бірінші және екінші мүшелеріне 1-ден қосып, 3-шіден 1-ді, 4-шіден 7-ні шегергенде пайда болған 4 сан арифметикалық прогрессия құрайды. Олар қандай сандар?

Жауабы.

Шешуі. Берілгені

мен ды табу керек.

Арифметикалық прогрессияның қасиеті бойынша

Жүйені шешіп анықтаймыз.

Жауабы.

**2.4. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессия, оның мүшелерінің қосындысының формуласы.**

Геометриялық прогрессияда еселігі болса, онда ол шексіз кемімелі прогрессия деп аталады.

Геометриялық прогрессияның мүшелерінің қосындысы

Формуласымен анықталатынын білеміз.

Нөмірлер саны шексіздікке ұмтылғанды символымен жазады.

арқылы жазуға келісілген.

Кез келген орта мектептің оқулығына болғанда көрсетілген.

Сонымен болғанда, шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның мүшелер саны

(9)

Формуласымен анықталады.

25-мысал. Геометриялық прогрессия берілген:

18, 12, 8,

Оның мүшелерінің қосындысы қандай?

Шешуі.

Ендеше прогрессия шексіз кемімелі.

Сондықтан

Жауабы. 54.

26-мысал. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы оның бірінші үш мүшесінің қосындысынан 2-ге артық. Бірінші алты мүшесінің қосындысы 3-ке тең. Пргрессияның қосындысы неге тең?

Жауабы.

Шешуі.

немесе бұл мәні жарамайды.

;

Жауабы.

2.5. II-тарауға жаттығулар.

1. Жалпы мүшелері бойынша тізбектердің алдыңғы 4 мүшесін анықтаңыздар:

1.1.

;

* 1. Арифметикалық прогрессияда бірінші мүшесі және айырмасы белгілі. Сұраған элементті анықтау керек.
  2. Екі таңбалы барлық жұп сандардың қосындысы қанша?
  3. 3-ке және 13-ке бөлінетін 1 мен 500-дің аралығындағы сандардың қосындысы неге тең?
  4. Екі таңбалы 3-ке бөлінетін жұп сандардың қосындысын табыңыздар.
  5. Үш таңбалы 3-ке және 41-ге бөлінетін сандардың қосындысын анықтаңыздар.
  6. 3-ке, 5-ке, 7-ге бөлінетін 1 мен 500-дің арасындағы сандардың қосындысы қандай?
  7. 7-ге және 11-ге бөлінетін үш таңбалы сандардың қосындысын анықтаңыздар.

.

* 1. 7-ге, 11-ге, 16-ға бөлінетін 1-мен 5000 аралығында орналасқан сандардың қосындысын табыңыздар.
  2. Арифметикалық прогрессияда Прогрессияның 12 мүшесінің қосындысы қандай?
  3. Арифметикалық прогрессияда Прогрессияныңбірінші төрт мүшесін жазыңыздар.
  4. Арифметикалық прогрессиядаОның 7-ші мүшесі неге тең?
  5. үшбұрышының қабырғалары арифметикалық пррогрессия құратын сандар, периметрі 15. Периметрінің қабырғаларының көбейтіндісіне қатынасы 1:7. Олардың ұзындықтары қандай?

Шешуі.

Қабырғалары

Табу керек:

немесе Теңдеу құрамыз:

болғанда

болғанда 7,5,3. Сол үшбұрыштың қабырғалары.

* 1. үшбұрышының қабырғалары арифметикалық пррогрессия құрайды, периметрі 15. Периметрінің қабырғаларының көбейтіндісіне қатынасы 1:8.

Олардың ұзындықтары қандай?

Жауабы: 4,5,6.

Шешуі.

Ортаншы қабырғасы 5 см;

осыларды ескеріп теңдеу құрамыз:

Сонымен

* 1. Периметрі 24 см. үшбұрышының қабырғалары арифметикалық пррогрессия құрайды. Периметрінің қабырғаларының көбейтіндісіне қатынасы 1:20 тең. Қабырғаларының ұзындықтарының анықтау керек.

Жауабы:

Шешуі. Берілгені: болсын.

Сонда үш қабырғасы

Сонда қабырғалары болады. Теңдеу құрамыз.

болғанда

* 1. Периметрі 45 см. үшбұрышының қабырғалары арифметикалық пррогрессия құрайды. Қабырғаларының көбейтіндісінен периметрін алғанда 2790 шығады. Бұлар қандай сандар?

Жауабы: 9,15,21.

Шешуі. Қабырғалары болса, болады.

Сонда

Теңдеуді шншнміз.

* 1. Периметрі 36 см. үшбұрышының қабырғалары арифметикалық пррогрессия құрайды. Қабырғаларының көбейтіндісімен периметрін қосындысы 1332. Қабырғаларының ұзындықтары қандай?

Жаубы: 6,12,18.

Шешуі.

Сонда Теңдеуді шешеміз:

* 1. Арифметикалық прогрессияның үш мүшесі берілген:

тің мәні қандай?

Жауабы.

Шешуі.

десек,

.

* 1. Қабырғалары арифметикалық прогрессия құратын үшбұрыштың қабырғаларының көбейтіндісіне периметрін қосқанда 2772. Периметрі 42 болғанда осы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы неге тең?

Жауабы.

* 1. 4 сан арифметикалық прогрессияның қатар мүшелері. Бірінші және үшінші мүшелерінен 5-ті, екінші мүшеден 6-ны шегеріп, төртінші мүшені өзгеріссіз қалдырсақ, бұл сандар геометриялық прогрессия құрайды. Олар қандай сандар?

Жауабы: 7,10,13,16.

Шешуі. Төрт сан

геометриялық прогрессия мүшелері. Геометриялық прогрессия және пропорцияның қасиеттерін пайдаланып, төмендегі жүйені шешеміз:

2

есептің шартын қанағаттандырмайды. Сонда

* 1. 4 сан геометриялық прогрессия құрайды:

1-ші және 3-мүшелеріне 5-ті, 2-ге 6-ны қосып, 4-ші мүшесін өзгеріссіз қалдырса, бұл сандар арифметикалық прогрессия құрайды. Олар қандай сандар?

Жауабы .

* 1. Геометриялық прогрессияның берілген элементтері бойынша жетіспеген элеметтерін анықтаңыздар.

Жауабы

Жауабы

Жауабы

Жауабы.

несеме

Жауабы.

1. Геометриялық прогрессияның алғашқы екі мүшесі 128 және 32. Оның 8 мүшесінің көбейтіндісі неге тең?

Жауабы 1.

Ескерту. теңдігін ескерген жөн.

1. Геометриялық прогрессияның бірінші және үшінші мүшелері 729 бен 9. Осы прогрессияның бірінші 7 мүшелерінің көбейтіндісі неге тең?

Жауабы 1.

1. Геометриялық прогрессияның екінші мүшесі 16, үшінші және бесінші мүшелерінің көбейтіндісі . Осы прогрессияның бірінші 6 мүшелерінің көбейтіндісі еселігі он таңбалы болған жағдайда қандай?

Жауабы

1. 243 пен 1 сандарының арасында орналасқан төрт сан бәрі қосылып геометриялық прогрессия құрайды. Олар қандай сандар?

Жауабы. 81; 27; 9; 3.

* 1. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессиялардың қосындысын табыңыздар.

1. 8; 4; 2;….

Жауабы 16.

1. 9; 3; 1;…

Жауабы

Жауабы 12.

Жауабы

Жауабы 2.

* 1. Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның еселігі қосындысы 6. Бірінші мүшесі неге тең?

Жауабы 3.

* 1. Төмендегі таза периодты бөлшектерді жай бөлшекке айналдырыңыздар.

1. 0,(7).

Шешуі

мұнда Ендеше

Жауабы

Шешуі.

Жауабы

Жауабы

Есте сақтаңыздар. Егерде таза периодты бөлшекті жай бөлшек түрінде жазуға қажет болса, онда бүтін бөлігін жазып оның қасына алымы таза период , бөліміне периодта неше таңбалы сан болса, сонша 9-ды тіркеп жазамыз. Мүмкін жағдайда бөлшекті қысқартып түрлендіреміз.

* 1. Аралас периодты бөлшекті жай бөлшекке айналдырыңыздар.

Жауабы

**4-дәріс**

**Функцияның шегі. Туынды. Туындының геометриялық және механикалық мағынасы. Дифференциалдаудың негізгі ережелері**

x саны x0 санына ұмтыла берсін, бірақ оған тең болмасын. Бұны x→x0 деп белгілейміз.

Мысалы мына сандар тізбегінің n-ші мүшесі, n өскен сайын нөлге ұмтылады (бірақ нөлге тең болмайды):

1, 1/10, 1/10^2, cdots, 1/10^n,…

Аңықтама.

A саны y=f(x) функциясының x→x0 ұмтылғандағы ***шегі*** деп аталады, егер x0 санына ұмтылған кез келген x1, x2, x3,… сандар тізбегі үшін сәйкесінше f(x1), f(x2), f(x3),… сандар тізбегі A санына ұмтылса.

Бұны *lim{x right x_0}{f(x)}* = A деп белгілейді.

Мысал.

y = x2 болса онда lim{x right 0}{x^2}=0. Өйткені нөлге ұмтылған кез келген x1, x2, x3,… сандар тізбегі үшін x12, x22, x32,… сандар тізбегі де нөлге ұмтылады ғой.

## Мына тамаша шектерді есте сақтау жөн:

1). lim{x right 0}{sinx/x}=1(бірінші тамаша шек).

2). lim{x right infty}{}(1+1/x) x = e, мұндағы eapprox2,718… (екінші тамаша шек).

## Үзіліссіз функция.

Аңықтама.

y=f(x) функциясы:

a). x0 нүктенің белгілі бір маңайында аңықталса.

b). *lim{x right x_0}{f}*(x)=*f* (x0)

Онда y=f(x) функциясы x0 нүктеде үзіліссіз деп аталады.

Мысал.

y = x2 функциясы x=0 нүктеде үзіліссіз, өйткені бұл функция біріншіден осы нүктенің аймағында аңықталған, екіншіден Функцияның шегі, y(0) = 0, яғни lim{x right 0}{y}(x) = y (0)

Аңықтама.

y=f(x) функциясы B сандар жиынының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда бұл y=f(x) функциясы B сандар жиынында үзіліссіз деп аталады.

Мысал.

y = x2 функциясы нақты сандар жиынында үзіліссіз.

Жаттығу.

Функцияның шегіфункциясы [0; 1] сегментінде үзіліссіз бе?

Көп жағдайда функция мәнін білумен қатар аргументтің өзгерісіне байланысты функцияның өзгеру жылдамдығын білу де маңызды болады.

y=f(x) функциясын қарастырайық (1-сурет). Осы функция http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image212.pngкесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын. Кез келген http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image213.pngүшін http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image214.pngайырма х аргументтің http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image215.pngнүктесіндегі **өсімшесі**деп аталады да, http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image216.pngдеп белгіленеді. Сонымен, http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image217.png= http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image218.pngx = http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image215.png+ http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image219.png.Ал http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image220.pngайырма f(x) функциясының http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image215.pngнүктесіндегі **өсімшесі**деп аталады да, http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image221.pngдеп белгіленеді. Сонымен, http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image222.png= http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image223.png= http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image224.png.

2-суретте көрсетілген y=f1(x) және y=f2(x) функцияларды қарастырайық. Аргумент мәні http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image225.pngшамаға өзгергенде бұл функциялардың мәндері де белгілі бір шамаға өзгереді. Суретте f2(x) функцияның мәні f1(x) функцияға қарағанда көп өзгереді (өседі).

**Аргумент мәні бірдей шамаға өзгерген кездегі функциялардың өзгерістерін салыстыру үшін функцияның өзгеріс жылдамдығы ұғымын енгізеді. Оны орташа жылдамдық дейді де, функция өзгерісінің аргумент өзгерісіне қатынасымен анықтайды:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Орташа жылдамдық | = | Функция өзгерісі |  | http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image226.png |
| Аргумент өзгерісі | = | http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image227.png |  |  |

Орташа жылдамдық х0 нүктесіне ғана қатысты қарастырылмай, аргумент өзгерісінен де байланысты болады. Функция жылдамдығын аргумент өзгерісінен байланыссыз қарастыру үшін функцияның нүктедегі жылдамдығын қарастырады. Функцияның нүктедегі жылдамдығын анықтау үшін х-ті х0 аргументке шексіз жақындатады, немесе http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image228.png. Осы кезде үзіліссіз функция өзгерісі нолге жақындайды, яғни http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image229.png. Нолге шексіз жақындайтын функция өзгерісінің нолге шексіз жақындайтын аргумент өзгерісіне қатынасы функцияның х0нүктедегі өзгеріс жылдамдығын береді. Функцияның х0нүктедегі осы өзгеріс жылдамдығын f(x) функциясының х0нүктедегі туындысы деп атайды: .

**Анықтама.**Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нолге ұмтылған кездегі шегі **функция туындысы** деп аталады. Әдетте оны http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image231.pngнемесе http://konspekta.net/lektsiiimg/baza1/2252223169012.files/image232.pngдеп белгілейді:



Туындының геометриялық мағынасы: туындысы функциясының графигіне нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады: .Туындының механикалық мағынасы. Егер айнымалысын уақыт деп есептеп, - функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда дененің уақытындағы жылдамдығын білдіреді.

**5-дәріс**

**Туындыны пайдаланып функцияны зерттеу және графигін салу**

http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1378.pngфункциясы http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1548.pngаралығында берілсін. Егер кез келген

http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1676.pngүшін http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1678.pngтеңсіздігінен http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1680.png( http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1682.png) теңсіздігі шығатын болса, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1317.pngфункциясы http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1684.pngаралығында өседі (кемиді) дейді.

**Теорема.** Егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1548.pngаралығында дифференциалданатын http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1685.pngфункциясының туындысы осы аралықта оң (теріс) болса, онда ол осы аралықта өседі (кемиді). Демек, өсу немесе кему интервалында функцияның туындысы таңбасын өзгертпейді.

*1-мысал.*http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1687.pngфункцияның өсу және кему аралықтарын табу керек. Ол үшін функция туындысының таңбасының тұрақтылық интервалдарын анықтаймыз http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1689.png. Бұл квадрат үшмүшеліктің түбірлері *x1=0, x2=2.* Сондықтан, егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1691.pngаралығында http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1693.png, демек http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1687.pngфункциясы бұл аралықта кемиді. Ал http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1695.pngаралықтарында *f'(x)>0,* демек бұл аралықтарда функция өседі.

**Теорема (экстремумның қажетті шарты).**Егер дифференциалданатын http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1378.pngфункциясының http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1698.pngнүктесінде экстремумы бар болса, онда сол нүктеде http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1700.pngболады. Осы теоремадан мынадай қорытындыға келеміз: егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.pngнүктесінде функцияның экстремумы бар болса, онда ол нүктеде оның туындысы нөлге тең, не ол нүктеде туындысы болмауы мүмкін. Кері тұжырым әрқашан орындала бермейді. ***Мысалы,*http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1703.png**функциясының *x0=0* нүктесінде туындысы http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1705.png, ал бірақ ол нүктеде функция не максимум, не минимум қабылдамайды. http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image991.pngфункциясының туындысы нөлге айналатын немесе тіпті болмайтын нүктелерді күдікті нүктелер немесе «кризистік» нүктелер деп атайды. Функцияның экстремумын осы күдікті нүктелердің арасынан іздеу керек.

**Теорема (экстремумнің жеткілікті шарты)***.* Егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1698.pngнүктесінде http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1378.pngфункциясының туындысы нөлге тең болса және http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.pngнүктесінен өткенде http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1709.pngтаңбасын өзгертсе, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.pngнүктесі экстремум нүктесі болады: 1) егер таңба «плюс»-тен «минус»-ке өзгерсе, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.png– максимум нүктесі; 2) егер таңба «минус»-тен «плюс»-ке өзгерсе, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.png– минимум нүктесі болады.

**2-мысал.**http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1711.pngфункцияны экстремумге зерттеп, өсу және кему аралықтарын анықтау керек. Функция туындысы http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1713.png, осыдан http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1715.png, http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1717.pngкүдікті нүктесін табамыз. http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1719.pngнүктесінде функцияның туындысы болмайды, сондықтан ол да күдікті нүкте. Интервалдар тәсілімен *f '(x)-*тің таңбаларын анықтаймыз. Функция http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1721.pngбарлық нүктелерде үзіліссіз, жеткіліктілік шарт бойынша http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1719.pngмаксимум нүктесі, ал http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1717.pngминимум нүктесі. (–¥, 0) және http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1723.pngинтервалдарда функция өседі, ал http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1725.pngинтервалда кемиді Зерттеу нәтижелерін таблицаға жазамыз:

Функцияның екінші ретті туындысы қолданылатын экстремумның тағы бір шартын келтірейік.

**Теорема.**http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image991.pngфункциясының http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.pngнүктесінде бірінші және екінші туындылары бар болсын. Егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1698.pngнүктесінде http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1730.pnghttp://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1056.pngфункциясының бірінші туындысы нөлге тең, яғни http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1700.pngболса, ал екінші туындысы нөлден ерекше, яғни http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1733.pngболса, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.png- экстремум нүктесі болады:

1) егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1735.pngболса, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.png– минимум нүктесі;

2) егер http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1737.pngболса, онда http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1380.png– максимум нүктесі болады.

**Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері**. Функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін экстремум нүктелерінде не кесіндісінің шеткі нүктелерінде қабылдауы мүмкін. Ең үлкен және ең кіші мәндерді табу үшін алдымен функцияның күдікті нүктелерін (не туынды нөлге тең, не туынды жоқ нүктелер) табу керек. Содан соң функцияның күдікті нүктелеріндегі және кесіндінің шеткі нүктелеріндегі мәндерін тауып, олардың ішінен ең үлкен және ең кіші мәндерді іздеу керек.

**3-мысал.**http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1739.pngфункциясының http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1741.pngкесіндісіндегі ең үлкен жіне ең кіші мәндерін табу керек. Күдікті нүктелерді табамыз:

http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1743.pngОсыдан http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1745.png- күдікті нүктелер. Енді функцияның күдікті нүктелердегі және шеткі нүктелердегі мәндерін табамыз: http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1747.png. Сонымен http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image984.pngүлкен http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1750.pngкіші http://ok-t.ru/mylektsiiru/baza1/120277217383.files/image1752.png.

**6-дәріс**

**Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл (негізгі ұғымдар, дәлелдеусіз). Интегралдар кестесі Анықталған интеграл. Ньютон-Лейбниц формуласы**

Анықталған интеграл үшін жоғарыдағы қасиеттерден басқа бірнеше маңызды қасиеттерін теорема түрінде келтірейік.

http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3132.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3736.pngкесіндісінде интегралданатын болсын және http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3738.png.

http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3740.pngүшін жаңадан http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3742.pngфункциясын мына қатыс http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3744.pngбойынша анықтайық.

Мұндағы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3746.pngжоғары шегі http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image1827.pngайнымалы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3749.pngфункциясынан алынған интегралмен өрнектеледі. Анықталған интегралдағы айнымалыны кез келген әріппен белгілеуге болатынын ескере кетейік. Одан оның мәні өзгермейтіндігі анықталған интегралдың анықтамасынан келіп шығады.

**Теорема 2.** Егер http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3751.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3736.pngкесіндісінде үзіліссіз болса, онда http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3754.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3756.pngаралығында http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3758.pngфункциясының алғашқы функциясы болады, яғни осы интервалда http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3760.pngболады.

Келесі теорема интегралдық есептеудің негізгі теоремасы болып есептеледі. Себебі анықталмаған интегралдың көмегімен анықталған интегралды табудың әдісін береді.

**Ньютон – Лейбниц теоремасы.**http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3758.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3763.pngкесіндісінде үзіліссіз және http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3765.pngоның осы кесіндіде алғашқы бейнесі болса, онда http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3767.png.

Мұндағы айырма http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3769.pngкелесі түрде қысқартылып жазылады:

http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3771.png.

**Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру**

**Теорема 4.** Егер http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3773.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3709.pngкесіндісінде үзіліссіз, ал http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3776.pngфункциясы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3778.pngкесіндісінде бірсарынды және үзіліссіз дифференциалданатын болса, мұндағы http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3780.png, http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3782.png, онда http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3784.png.

*Мысал 1.*http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3786.pngинтегралын есептейік. Ол үшін http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3788.pngауыстыруын қолданамыз.

http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3790.png



Бұлинтегралбіріншіквадраттаорналасқанрадиусыбіргетең, центрікоординатбаснүктесіндегідөңгелектіңширекбөлігініңауданынбілдіреді.

**Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау**

**Теорема 5*.***http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3794.pngкесіндісінде http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3796.pngжәне http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3798.pngүзіліссіз дифференциалданатын функциялары берілсін, сонда мына теңдік орынды

http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3800.png.

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады http://ok-t.ru/studopediaru/baza11/261822908888.files/image3802.png.

*Мысал 2.*



Анықталған интегралдың көмегімен берілген аймақтың шекаралары әртүрлі болып келген фигуралардың ауданын, қисық доғ,асының ұзындығын, дененің көлемін және айналу бетітің ауданын табуға болады.

**7-дәріс**

**Векторлар. Скалярлар. Осьтегі вектордың проекциясы. Векторларға қолданылатын амалдар (қосу, азайту, векторды скалярға көбейту). Координат осьтері бойынша векторды жіктеу**

**Вектор** деп бағытталған кесіндіні атаймыз. Яғни AB вектордың A басы мен B ұшы бар болады:



Мысалы.



Вектордың басы мен ұшының арақашықтығы оның (вектордың) ұзындығы немесе абсолюттік шамасы деп аталады.

Мысалы жоғарыдағы CD векторының |CD| ұзындығы:

|CD|= 

|CD|= вектордың ұзындығын есептеу

|CD|=вектордың ұзындығы

|CD|=вектордың ұзындығы

|CD|=5

Егер вектордың басы мен ұшы бір нүктеде орналасса онда бұндай векторды нөлдік **вектор** деп атайды. Өйткені бұндай вектордың ұзындығы нөлге тең.

Вектордың координаттары деп оның (вектордың) ұшының және басының сәйкесінше координаттарының айырмасын атаймыз.

Яғни AB векторының басы A(x1, y1) нүктесі ал ұшы B(x2, y2) нүктесі болса онда AB векторының координаттары (x2-x1, y2 -y1) болады.

Мысалы жоғарыдағы CD векторының координаттары (5-1; 4-1)=(4; 3).

Геометрияда сәйкесінше координаттары бірдей векторларды бірдей векторлар деп санайды.

Соңдықтан векторларды a, b, c,… деп бір ғана әріппен белгілейміз. a векторының координаттарын (ax, ay) деп белгілейміз. Ал a векторының өзін кейде {ax, ay} деп те белгілейміз.

Еркін векторлардың әртүрлі анықтамалары. Еркін векторларға қолданылатын сызықтық амалдар және олардың қасиеттері. Векторлардың сызықтық тәуелдігі және тәуелсіздігі, векторлардың сызықтық тәуелділігінің геометриялық мағынасы.

**Анықтама:** Бағытталған кесінді (немесе реттелген қос нүкте) вектор деп аталады.

Аhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image001.gifВ **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image002.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image003.gif**

А нүктесі вектордың бастапқы нүктесі (басы), ал В-соңғы нүктесі (ұшы) деп аталады. Векторды былай белгілейді: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image004.gif**.

Анықтама: Вектордың бастапқы және соңғы нүктелері беттесіп кетсе, оны нолдік вектор деп атайды. Нолдік векторды былай белгілейді: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image005.gif**. Нөл векторлардың бағыттары анықталмаған, модульдері нөлге тең.

Анықтама:Вектордың басы мен ұшының ара қашықтығы оның ұзындығы немесе модулі деп аталады. Былай белгіленеді: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image006.gif** немесе **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image007.gif**.

Анықтама: Модульдері бірге тең векторлар бірлік немесе орт вектор деп аталады. Берілген **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif**векторының орт векторы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image009.gif** деп белгіленеді және оның бағыты **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторының бағытымен бір бағыттас болады.

Анықтама: Бір түзудің немесе параллель түзулердің бойында жатқан векторлар коллинеар деп аталады.

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image010.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image011.gif А В С **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif**

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image012.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image013.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image014.gif **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image015.gif**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image016.gif

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image017.gif** - коллинеар векторлар.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image018.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image019.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image003.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image020.gif** - коллинеар векторлар.

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image021.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image022.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image023.gif

Анықтама: Өзара коллинеар, ұзындықтары тең және бағыттары бірдей векторлар тең векторлар деп аталады. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image024.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image025.gif** деп белгіленеді.

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар.

Анықтама: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторын нақты λ санына көбейту деп мына шарттарды қанағаттандыратын **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image026.gif**векторын айтады:

1. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image027.gif**

2. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image026.gif** вектор **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторына коллинеар.

3. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image026.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторының бағыттары бірдей, егер **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image028.gif** және қарама-қарсы бағытталған, егер **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image029.gif**. Егерде **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image030.gif** болса, онда векторлардың бағыттары анықталмаған, яғни кез келген бағытты қабылдайды.

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image031.gif

-**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image032.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image033.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image034.gif**

1-қасиеті. Кез келген α және β сандары және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторы үшін мына теңдік орынды: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image035.gif** .

2-қасиеті. Екі вектордың қосындысында ауыстырымдылық заңы орындалады, яғни кез келген екі вектор **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image003.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image036.gif**

3-қасиеті. Үш вектордың қосындысына терімділік заңы орындалады, яғни әруақытта **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image037.gif**

4-қасиеті. Векторлардың қосындысын санға көбейту үлестірімді, яғни кез келген **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image026.gif**,**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif**векторлары мен α саны үшін мына теңдік орындалады:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image038.gif**

5-қасиеті. Кез келген α,β сандары және кез келген **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторы үшін

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image039.gif** теңдігі орындалады. Екі бөлігіндегі векторлар өзара коллинеар.

Анықтама: Параллель көшіруге болатын векторларды бос векторлар дейді, яғни бастапқы нүктесіне тәуелсіз, тек **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image040.gif**векторының ұзындығы мен бағытына ғана тәуелді вектор.http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image041.gif

А В А**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image042.gif** В**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image042.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image043.gif** векторларын қарастырамыз. Бұл векторлардың қосындысы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image044.gif** басы бірінші вектордың басымен беттесетін, ал ұшы соңғы вектордың ұшымен сәйкес келетін бір вектормен анықталады.

Векторларды азайтуды екі вектордың қосындысы түрінде қарастыруға болады, тек екінші қосылғыш (-) таңбасымен алынады.

**Теорема:** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image033.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image026.gif** векторларын **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image045.gif** **(1)** түрінде өрнектесе, онда бұл векторлар коллинеар және керісінше, егер екі вектор коллинеар болса, онда оларды **(1)** қатыс түрінде өрнектеуге болады.

Анықтама: Векторлардың е осіне проекциясы дегеніміз бас нүктесі вектордың оське түсірілген бас нүктесінің проекциясы болатын, ал соңғы нүктесі вектордың ұшының оське түсірілген проекциясы болатын кесіндінің ұзындығы және ол вектор мен ось арасындағы бұрыш сүйір болса оң (+) таңбамен, ал доғал болса теріс (-) таңбамен алынады.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image046.gif**

Мысал.Ұзындығы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image047.gif** тең **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image008.gif** векторы ох осімен 60**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image048.gif** бұрыш жасайды. Осы вектордың ох осіндегі проекциясын табу керек.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image049.gif**



**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image018.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image019.gif** е

Векторлардың қосындыларының проекциясы әр вектордың проекцияларының қосындысына тең:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image051.gif**

**1.** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image052.gif** векторлары берілсін делік. Осы n векторлардың біреуін қалғандарының сызықтық комбинациясы түрінде өрнектеуге мүмкін болса, онда оларды сызықты тәуелді деп атайды.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image053.gif**

**2.** Егер **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image054.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image055.gif** сандары табылып берілген **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image056.gif** n векторымен **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image057.gif** түрінде өрнектеуге мүмкін болса, онда векторлар сызықты тәуелді деп аталады.

Векторларды жіктеу.

**1-теорема:** Кез келген жазықтықтағы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image058.gif** векторын коллинеар емес екі векторға жіктеуге болады:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image059.gif**

**2-теорема:** Кез келген кеңістіктегі **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image060.gif** векторын коллинеар емес үш векторға жіктеуге болады:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image061.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image062.gif** коллинеар емес векторлар.

Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі.

Координаталар жүйесін былай енгіземіз: өзара перпендикуляр бірлік **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image063.gif** векторларын аламыз да оларды созып, x,y,z координаталық осьтерін саламыз және өлшем бірлігін енгіземіз.

 **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image065.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image066.gif**

**Анықтама:** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image063.gif** үштік векторы соңғы вектордың ұшынан қарағанда І-ші вектордан екіншіге қысқаша бұру сағат тілі жүрісіне қарсы бағытталса оң деп аталады. ОММ**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image042.gif** үшбұрышынан **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image067.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image068.gif** векторы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image069.gif** бірлік векторына коллинеар болғандықтан **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image070.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image071.gif** үшбұрышынан

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image072.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image073.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image074.gif** векторлары **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image075.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image076.gif** векторларына коллинеар. Өйткені осы табылған мәндерді орындарына қоямыз. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image077.gif** **(2)**

Сонымен **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image078.gif** радиус-векторы М нүктесінің координаталарының **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image063.gif** бірлік векторларына көбейтінділерінің қосындысы түрінде өрнектеледі.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image079.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image080.gif** екі векторды аламызда оларды қосамыз

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image081.gif**

Векторларды қосқанда олардың аттас координаталары қосылады. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image033.gif** векторын λ санына көбейтеміз: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image082.gif** Векторды λ санына көбейткенде оның әрбір координатасы сол санға көбейтіледі.

Ескерту: (2) қатыс вектордың векторлық түрі болып табылады, ал координаталық түрі мына түрде беріледі: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image083.gif** **(2')**

**Мысал:** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image084.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image085.gif** векторлары берілген. Табу керек: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image086.gif** ізделінді векторды векторлық түрде береміз:

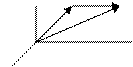
**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image087.gif** координаталық түрде **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image088.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image089.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image090.gif**

**1-есеп:** Кеңістікте **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image091.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image092.gif** нүктелері берілген. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image093.gif**векторларын табу керек.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image094.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image095.gif**

 Радиус векторды табамыз: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image097.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image098.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image099.gif** үшбұрышынан **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image003.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image100.gif**

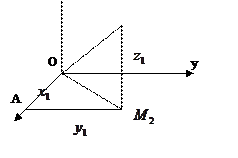
**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image101.gif**векторлық түрде: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image102.gif**. **(2'')**

Вектордың координаталарын табу үшін вектор ұшының координаталарынан вектор басының сәйкес координаталарын алу қажет.

Мысал: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image103.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image104.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image105.gif**.

**2-есеп:http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image106.gif** векторының ұзындығын табу керек **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image107.gif**?

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image094.gif** | |



**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image109.gif**: - гипотенузасын табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image110.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image111.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image112.gif**: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image113.gif** табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image114.gif**

Сонда **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image115.gif**

Сонымен, вектордың ұзындығы мына формуламен табылады. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image116.gif**

**Анықтама:**Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі деп осы векторлардың модульдері мен олардың арасындағы бұрышының **косинусының**көбейтінділерін айтады: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image188.gif**. (4)

|  |
| --- |
|  |
|  | http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image189.gif |

А

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif**

О **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image191.gif**

В **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image192.gif**

**1-қасиет.** Скалярлық көбейтінді бір вектордың модулі мен екінші вектордың бірінші вектордағы проекциясына көбейтіндісіне тең, яғни

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image193.gif** (5)

**2-қасиет.** Екі вектор өзара перпендикуляр болғанда ғана олардың скалярлық көбейтіндісі нолге тең болады.

**3-қасиет.** Векторлардың скалярлық көбейтіндісінде ауыстырымдылық заңы орындалады. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image194.gif**

**4-қасиет.** Скалярлық көбейтіндіні бір **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image195.gif** санына көбейту үшін көбейткіштердің біреуін ғана сол санға көбейтсе болғаны.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image196.gif**

**5-қасиет.** Векторлардың скалярлық көбейтіндісінде үлестірімділік заңы орындалады. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image197.gif**

Координаталарымен берілген векторлардың скалярлық көбейтіндісі

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image198.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image199.gif** екі векторы берілсін.

Соңғы қасиет бойынша бұл векторларды мүшелеп көбейтуге болады.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image200.gif**i,j,k - бірлік векторлары өзара перпендикуляр, сондықтан олардың скаляр көбейтіндісі нолге тең.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image201.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image202.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image203.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image204.gif** (6)

Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі осы векторлардың аттас координаталары көбейтінділерінің қосындысына тең.

1-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image205.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image206.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image207.gif**

2-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image208.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image209.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image210.gif**

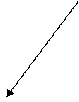
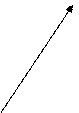
Векторлардың скалярлық көбейтінділері жәрдемімен вектордың ұзындығының формуласын қорытып шығарамыз.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image211.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image212.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image213.gif**

Екі вектордың перпендикулярлық шартын анықтайық.

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image214.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image215.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image216.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image219.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image220.gif**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image192.gif**векторлары өзара перпендикуляр болсын, яғни **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image221.gif**, онда скалярлық көбейтіндісі нолге тең: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image222.gif**. Сонда **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image223.gif** (7)

Бұл екі вектордың перпендикулярлығының шарты.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** векторы мен бірлік **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image227.gif** векторларының арасындағы бұрыштарды қарастырамыз. Ол бұрыштарды былай белгілейік:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image228.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image229.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image230.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** векторының кез келген бірлік векторға, мысалы i-ге, көбейтіндісін қарастырамыз: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image231.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image232.gif**

Бұдан (\*) формуласы бойынша **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image191.gif** бұрышының косинусын табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image233.gif**

Осы тәсілмен қалған бұрыштардың косинусын табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image234.gif**; **** (8)

Бұл косинустар **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** векторының бағыттаушы косинустары деп аталады. Бағыттаушы косинустардың квадраттарының қосындысы бірге тең:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image236.gif**

Бұл формуланы дәлелдеу үшін (8) формуланы квадрат дәрежеге шығарамыз да қосамыз.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image237.gif**

3-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image238.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image239.gif** векторлары **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image191.gif**-ның қандай мәнінде перпендикуляр болады. (7) перпендикулярлық шарты бойынша олардың скалярлық көбейтіндісін табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image223.gif**; 1\*2-3\*2-2\*2=0; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image191.gif**=10.

4-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image240.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image241.gif** векторлары берілсін делік.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image242.gif** скалярлық көбейтіндісін есептеу керек.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image243.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image244.gif**

-3**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image245.gif** 2**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image246.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image003.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image247.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image248.gif**

Екі вектордың ізделінді скаляр көбейтіндісін табайық.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image249.gif**

Вектордың өзінің өзіне скалярлық көбейтіндісі оның ұзындығының квадратына тең болады: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image250.gif**

Вектордың бағыты.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif**, **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image192.gif** векторлары берілсін. Осы векторлардың арасындағы бұрышты анықтау керек.

Скалярлық көбейтінді **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image251.gif** формуласынан **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image252.gif** (\*) аламыз.

О-дік емес **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image253.gif** векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы осы векторлардың скалярлық көбейтіндісін, олардың ұзындықтарының көбейтіндісіне бөлгенге тең.

Ал вектордың координаттары берілсе, онда

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image254.gif** (\*\*)

1-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image255.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image256.gif** векторларының арасындағы **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image257.gif** бұрышын табу керек. (\*\*) - формуласын пайдаланамыз.

Начало формы

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image258.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image257.gif**=135**0**.

Конец формы

2-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image259.gif** векторының **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image260.gif**-орт векторының координаталарын табыңдар. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image261.gif**

1-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image190.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image253.gif** векторларының арасындағы бұрыш **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image262.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image263.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image264.gif**.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image265.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image266.gif**

Шешу:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image267.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image268.gifhttp://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image269.gif**

2-мысал.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image270.gif** теңдігін қанағаттандыратын **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image271.gif** векторлары берілген және

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image272.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image273.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image274.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image275.gif**

Шешуі:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image276.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image277.gif**

**8-дәріс**

**Кез келген фигуралардың ұқсастығы. Ұқсастық коэффициенті. Ұқсас фигуралар аудандарының қатынасы. Тік бұрышты үшбұрыштағы және дөңгелектегі метрикалық қатынастар**

1. Бұру түрлендіруі дегеніміз не?

2. Тең фигуралар гомотетиялы бола ма?

**ІІ.** 1. Қандай фигураларды бұру түрлендіруі арқылы өзіне-өзін бейнелеуге болады?

2. Гомотетия параллелограмды қандай фигураға бейнелейді?

**ІІІ.** 1. Параллель көшіру дегеніміз не?

2. Гомотетия трапецияны қандай фигураға бейнелейді?

**ІҮ.** 1. Параллель көшіру түрлендіруі кезінде өзіне-өзін көшетін, яғни өзгермейтін нүкте табыла ма?

2. Гомотетия дегеніміз не?

**Ү.** 1. Қозғалыс дегеніміз не?

2. Гомотетияның негізгі қасиеттерін ата.

**ҮІ.** 1. Осьтік симметрия деген не?

2. Гомотетия үшбұрышты қандай фигураға бейнелейді?

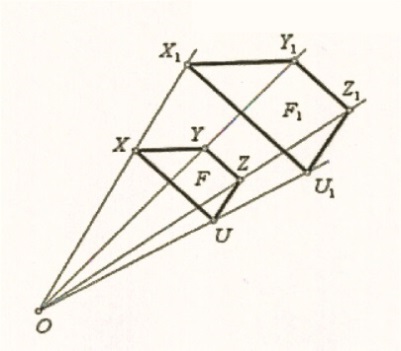
**ҮІІ.** 1. Центрлік симметрия дегеніміз не?

2. Гомотетия шеңберді қандай фигураға көшіреді?

**ҮІІІ.** 1. Нүктеге қатысты симметрия, түзуге қатысты симметрия деген не?

1. Гомотетияның қасиеттерін атаңдар

**Анықтама.** Егер Ф фигурасын Ф1 фигурасына бейнелегенде, олардың сәйкес нүктелерінің арақашықтықтары бірдей к қатынасына өзгеретін болса, онда Ф фигурасын Ф1 фигурасына **ұқсас** деп атаймыз.



1. **Анықтама.** Жазықтықтағы әрбір А нүктесі үшін ОА сәулесінің бойында жататын және ОА1/ОА=к шартын қанағаттандыратын А1 нүктесін А нүктесіне **гомотетиялы нүкте** деп атаймыз. Ал жазықтықтың бұл түрлендіруін **гомотетия** деп атайды.
2. Тест жұмысы

1. . а) АВ және СD кесінділері гомотетиялы бола ма?

ә) Гомотетия коэффициенті қандай?

A. а) болады; ә) 

B. а) болады; ә) 

C. а) болмайды; ә) 

D. а) жауабы өзге.

2. ді табыңдар.

A. 

B. 

C. 

D. 

3. мен -ді табыңдар.

A. 

B. 

C. 

D. жауабы өзге

4. -ның перимтерін табыңдар.

A. 12 см

B. 13 см

C. 14 см

D. 15 см

5. және тең бүйірлі үшбұрыштар. -ны табыңдар.

1. A. 

B. 

C. 

D. 

6. , АВС үшбұрышының периметрі 42 см, ал -дің периметрі 14 см және  АВ-ны табыңдар.

A. 13 см

B. 14 см

C. 15 см

D. 16 см

**9-дәріс**

**Екі нүктенің ара-қашықтығын табудың координатты түрдегі формуласы. Шеңбердің теңдеуі. Шеңберге іштей және сырттай сызылған дұрыс көпбұрыштар. Олардың периметрі мен ауданы. Шеңбердің ұзындығы және дөңгелектің ауданы**

Екі нүктенің ара қашықтығы жазықтықта берілген М**1** және М**2** нүктелерінің ара қашықтығын табамыз.

|  |
| --- |
|  |
|  | http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image323.gif |

Вектор құрамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image282.gif**

Вектор ұзындығы мына формуламен табылады.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image283.gif**

Бұл екі нүктенің ара қашықтығының да формуласы.

**Мысал.** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image284.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image285.gif** нүктелерінің ара қашықтығын табу керек.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image286.gif**

**1-мысал.** Центрі С(3;2) нүктесінде, радиусы 5-ке тең шеңбер теңдеуін жазыңдар.

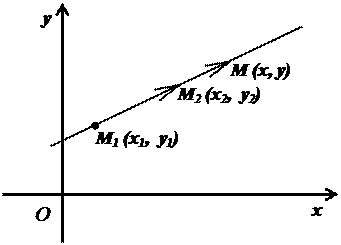
(+) (х - 3)**2** + (у - 2)**2** =5**2**.

x**2** + y**2** - 6x - 4y -12 = 0.

**2-мысал.** x**2** + у**2** + 8х - 4у + 16 = 0 шеңбер теңдеуінен оның центрі мен радиусын табыңыз.

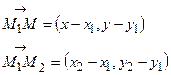
**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image321.gif**)

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image322.gif** C(-4;2); R=2.

3)Екі нүктеден өтетін түзу теңдеуі.Түзу **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image342.gif**

екі нүктесімен берілсін. Түзудің бір **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image328.gif** нүктесін

аламыз да

**** векторларын қарастырамыз.

Бұл екі **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image344.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image345.gif**

векторлары бір түзу бойында жатыр және олар коллинеар. Векторлардың коллинеарлық шарты бойынша:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image346.gif**

Бұл екі нүктеден өтетін түзу теңдеуі болып табылады.

**Мысал.** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image347.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image348.gif** нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін құрыңдар және kмен в-ны табыңдар.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image349.gif**

4) Түзудің жалпы теңдеуі және оны зерттеу.

**Анықтама.** Бірінші дәрежелі х,у айнымалыларымен берілген теңдеу жазықтықта түзуді анықтайды.

Түзудің жалпы теңдеуі мына түрде беріледі:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image350.gif**

мұндағы А мен В айнымалылардың коэффициенттері.

1. Егер бос мүше С=0, онда теңдеу мына түрге келеді. Ах+Ву=0. х=0, у=0 сандары түзу теңдеуді қанағаттандырады, ендеше түзу бас нүкте арқылы өтеді.

2. Егер х-тің коэффициенттері А=0 болса, онда теңдеу Ву+С=0 немесе **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image351.gif**түріне келеді, онда ол Ох осіне параллель түзу болады.

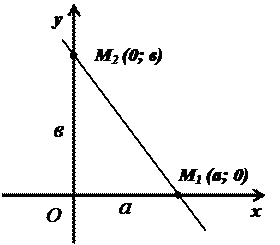
3. у-тің коэффициенттері В=0 болса, ондleftimg width= mce\_src=(аimages/stories/lecture/geom.files/image332.gif/subа түзу Ах+С=0 түріне келеді, ал бұл жағдайда түзу Оу осіне параллель болады.

4. Егер А=С=0 болса, онда Ву=0 (у=0) түзуі Ох осімен беттеседі.

5. Егер В=С=0 болса, онда Ах=0 (х=0) түзуі Оу осімен беттеседі.

5) Түзудің кесінділік теңдеуі.

Түзудің координата осьтерімен қиылысу нүктелері **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image352.gif** және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image353.gif** белгілі деп есептелік.



Түзу өтетін М**1**, М**2** нүктелері белгілі болғандықтан екі нүкте арқылы өтетін

түзудің теңдеуі арқылы

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image355.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image356.gif**

Түзудің кесінділік теңдеуі деп аталады.

**2-тәсіл.** Ах+Ву+С=0 түзудің жалпы теңдеуі **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image352.gif**; **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image353.gif** -

координаттарын теңдеуге қоямыз.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image357.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image358.gif**.

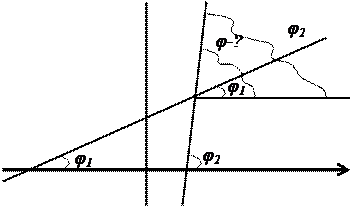
**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image359.gif** /:С

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image356.gif**

**Мысал.** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image360.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image361.gif**

6) Екі түзудің арасндағы бұрыш. Екі түзудің паралельдік және перпендикулярлық шарттары.

 **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image363.gif**бұрыштық коэффициенттерімен екі түзу

берілсін. Суреттен түзулердің арасындағы бұрыш

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image364.gif** екені

көрініп тұр. Екі бұрыштың айырымының тангенсінің

формуласы белгілі: **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image365.gif**

Тангенстерді бұрыштық коэффициенттермен

алмастырамыз да екі түзудің арасындағы бұрышты табатын

тангенс формуласын аламыз.**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image366.gif** (V)

Осы формуладан түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шартын табамыз.

1) Түзулер параллель делік, яғни олардың арасындағы бұрыш **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image367.gif**, оны (V) формулаға қоямыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image368.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image369.gif**

Ендеше, екі түзу параллель болу олардың бұрыштық коэффициенттерінің теңдігі қажетті әрі жеткілікті, яғни **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image370.gif** бұл екі түзудің параллельдік белгісі деп аталады.

2) Түзулер перпендикуляр делік, онда олардың арасындағы бұрыш **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image371.gif** Оны (V) формулаға қоямыз.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image372.gif**.

Бөлшек шексіздікке тең болса, егер оның бөлімі нөлге тең болса, яғни **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image373.gif** немесе **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image374.gif** Екі түзу перпендикуляр болу үшін олардың бұрыштық коэффициенттерінің көбейтіндісі -1-ге тең болуы қажетті әрі жеткілікті бұдан **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image375.gif** ал бұл екі түзудің перпендикулярлық белгісі деп аталады.

**Мысал.** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image376.gif** нүктесі арқылы өтетін және **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image377.gif** түзуіне параллель және перпендикуляр түзу теңдеуін жазыңдар. Берілген түзу теңдеуінің бұрыштық коэффициентін табамыз:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image378.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image379.gif**

Түзудің теңдеуін жазу үшін **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image380.gif** формуласын пайдаланамыз.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image381.gif** Енді теңдеуге қоямыз. **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image382.gif**

http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image383.gif **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image384.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image385.gif**

7) Екі түзудің өзара орналасуы.

Екі түзудің жалпы теңдеуі берілсін **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image386.gif**

Осы түзулердің коэффициентеріне қатысты қиылысатынын, параллель және перпендикуляр болатынын анықтау керек.

1. Түзулердің өзара орналасуын анықтау үшін екі түзудің теңдеулер жүйесін зерттеу қажет:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image387.gif**

Екі түзу қиылысатын болса, онда оның бір ғана шешімі болады. Демек, жүйенің бас анықтауышы нөлден өзгеше:

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image388.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image389.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image390.gif** Коэффициенттері пропорционал болмаса түзулер қиылысады.

2. Түзулер параллель болсын, яғни олардың ортақ нүктесі жоқ және түзулер жүйесінің шешімі жоқ. Онда бас анықтауыш нөлге тең, ал қосымша анықтауыштар нөлден өзге болады.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image391.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image392.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image393.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image394.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image395.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image396.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image397.gif**

Бұл екі түзудің параллельдік белгісі.

3. Түзулер беттескен жағдайда, яғни олардың шектеусіз көп ортақ нүктелері бар және жүйенің ақырсыз көп шешімі бар. Бұл жағдайда бас анықтауышта және қосымша анықтауышта нөлге тең.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image391.gif** **http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image398.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image399.gif** Бұл түзулердің беттесу шарты.

Мысалдар.

1) Екі түзудің теңдеуі берілсін.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image400.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image401.gif** түзулер қиылысады.

2) Екі түзудің теңдеуі берілсін.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image402.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image403.gif** түзулер параллель.

3) Екі түзудің теңдеуі берілсін.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image404.gif**

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image405.gif** түзулер беттеседі.

Түзулер шоғы.

**Анықтама.** Бір нүктеден өтетін түзулер жиынын **түзулер шоғы** деп атайды.

**http://yki.kz/images/stories/lecture/geom.files/image406.gif** k-ны өзгертетін болсақ, мұндай теңдеу осы нүктеден өтетін кез келген түзу теңдеуін береді. Осы түзулердің бәрі центр деп аталатын М**0** нүктесінен өтетін түзулер шоғын береді.

**Шеңбер**

**Шеңбер** деп центрі делінетін белгілі бір нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан нүктелер жиынтығын атаймыз, бұл қашықтықты радиус дейміз.

Біз жазықтықта орналасқан кез келген M(x1, y1) және N(x2, y2) нүктелерінің арақашықтығы sqrt{({{x\_2}-{x\_1}})^2+({{y\_2}-{y\_1}})^2} формуласымен есептелінетінің білеміз. Бұл формуланың көмегімен шеңбердің теңдеуін қорыта аламыз:

C(x0, y0)-деп шеңбердің центрін ал r әрпімен шеңбердің радиусын белгілейік. Шеңбердің аңықтамасы бойынша шеңберге тиісті кез келген (x, y) нүктесі sqrt{({{x}-{x\_0}})^2+({{y}-{y\_0}})^2}=r формуласын қанағаттандыруы тиіс.

Соңғы теңдіктің екі жағын квадраттасақ:

(x-x0)2+(y-y0)2=r2

Бұл теңдеу шеңбердің теңдеуі боп табылады.

Шеңбердің теңдеуі

**( х - а )² + ( у – b )² =R²** - центрі (a;b) нүктесінен өтетін шеңбердің теңдеуі

**х² + у² =R²** - центрі координаталар басынан О(0;0) нүктесінен өтетін

шеңбердің теңдеуі

( x – 3 )2 + ( y + 4 )2 = 20 шеңбердің центрінен координаталар басына дейінгі ара қашықтықты тап. 5

Бұл теңдеулерден шеңбердің теңдеуін тап. (х-а)²+(у-b)² =R²

Қандай нүктеде шеңбер Ох-ті кесіп өтеді:(х-1)²+(у+2)²=8 2

Қандай нүктеде шеңбер Ох-ті кесіп өтеді:(х-3)²+(у-2)²=18 4

Ц(3;5) В(4;9) B нүктесі шеңберге тиісті болса, шеңбердің радиусын тап. 9

Центрі ( 2; 4 ) ал радиусы 3 – ке тең шеңбердің теңдеуін тап. (х-4)²+(у+2)²=9

Центрі (1;0) нүктесі, ал радиусы R=2 болатын шеңбердің теңдеуін тап. (х-1)² + у² =4

Центрі (3;1) және В(4;2) нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін тап. (4-3)²+(2-1)² =R²

Центрі (3;-1) нүктесінен өтетін R=2 тең шеңбердің теңдеуін тап. (х+3)² + (у+1)² =2²

Центрі (5;-2) нүктесінен өтетін R=3 тең шеңбердің теңдеуін анықта. (х-5)²+(у+2)² =3²

Центрі (5;-5) нүктесінен өтетін R=8 тең шеңбердің теңдеуін тап. (х-5)²+(у+5)² =8²

Центрі (6;-8) нүктесінен өтетін R=3 тең шеңбердің теңдеуін анықта. (х-6)²+(у+8)²=3²

Центрі А(3;1) нүктесі арқылы В(6;5) нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін тап. (х-3)² + (у-1)² =25

Шеңбердің радиусын тап. Егер де теңдеуі: х²+у²+6х-8у+5=0 2√5

Шеңбердің радиусын тап. Егер теңдеуі: х²+у²-10х+4у-3=0 4√2

**Дөңгелектің ауданы**

Дөңгелектің ауданынын формуласын анықта. Sq =ПR2

Дөңгелектің ауданын 2 есе арттыру үшін R-сын неше есе арттыру керек.

Дөңгелектің R= 10 см. Ауданын тап. 314 см²

Егер дөңгелектің диаметрін 2 есе үлкейтсе, онда дөңгелектің ауданын неше есе үлкейеді? 4 есе

Егер шеңбердің ұзындығы L, болса дөңгелектің ауданын тап.

Дөңгелектің R=5 см. Ауданын тап. 78,5

Дөңгелектің ауданын 3 есе арттыру үшін R-сын неше есе арттыру керек.

Егер дөңгелектің диаметрін 6 есе үлкейтсе, онда дөңгелектің ауданы неше есе үлкейеді? 12

9. Дөңгелектің R=20 см. Ауданын тап. 1256

Дөңгелектің ауданын 7 есе арттыру үшін. R-сын неше есе арттыру керек. 7

Сырттай жанасатын екі дөңгелектің аудандарының қосындысы 1300 см2 Егер олардың центрлерінің ара қашықтығы 14 см-ге тең болса, онда олардың радиустары неге тең? 11см;3 см

Квадрат дөңгелекке іштей сызылған . Егер де дөңгелектің радиусы 4 см болса, онда квадраттың керіп тұрған қырының кіші сегментінің ауданын тап. (4 + 8)

АВСД квадраты дөңгелекке іштей сызылған. Дөңгелек радиусы 4см-ге тең болса, онда ВС қабырғасы қиып түсіретін кіші сегменттің ауданын тап. дөңгелекке іштей сызылған . Егер де дөңгелектің радиусы 4 см болса, онда квадраттың керіп тұрған қырының кіші сегментінің ауданын тап. (4 - 8)

Радиусы а-ға тең дөңгелекке іштей квадрат сызылған, бұл квадратқа іштей дөңгелек сызылған және т.с.с. Онда барлық квадраттардың аудандарының қосындысы тең. 4а2

Ромбтың биіктігі 2 тең. Бүрышы 300 болса, іштей сызылған дөңгелек ауданын тап.

**10-дәріс**

**Стереометрия аксиомалары. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтардың өзара орналасуы. Түзулердің жазықтыққа параллельдік және перпендикулярлық шарты**

1. **Стереометрия аксиомалары. Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтардың өзара орналасуы**

Планиметрия (лат. planum — жазықтық, грек. metreo - өлшеймін) — геометрияның жазықтықта жатқан фигуралардың қасиеттерін зерттейтін бөлімі.

Стереометрия (гр. stereo - кеңістік, metreo - өлшеймін) – геометрияның кеңістіктегі фигуралардың қасиеттерін зерттейтін бөлімі.

Стереометрия, планиметрия курсы сияқты, аксиомалар жүйесі арқылы беріледі.

Стереометрия аксиомалары жүйесіндегі анықтамасыз қабылданатын негізгі ұғымдар: нүкте, түзу және жазықтық. (Планиметриядан нүкте мен түзу ғана болатын).

Стереометрияда да планиметриядағы нүктелер мен түзулерді белгілеу тәсілі сақталады. Мысалы A, B, C, D  нүктелері, a, b, c, d, AB, EF түзулері.

Жазықтықтарды грек алфавитінің кіші әріптерімен белгілейді, мысалы α, β, γ, δ.

**Стереометрия аксиомалары жүйесі планиметрияның аксиомаларына қоса мынадай аксиомалардан тұрады:**

С1. Қандай жазықтықты алсақ та, сол жазықтықта жататын нүктелер де, жатпайтын нүктелер де бар болады.

С2. Егер әр түрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда жазықтықтар осы нүкте арқылы өтетін түзу бойымен қиылысады.

С3. Егер түзудің екі нүктесі жазықтықта жатса, онда түзу тұтасымен осы жазықтықта жатады.

|  |  |
| --- | --- |
| Планиметрияда  (жазықтықта)   * Нүкте * түзу | Стереометрияда  (кеңістікте)   * нүкте * түзу * жазықтық |

Стереометрияда нүкте, түзу, жазықтықпен қатар геометриялық денелер, оның қасиеттері қарастырылады, аудандары мен көлемдері есептелінеді.

**Стереометрия** (грек. Stereos - кеңістік, metreo – өлшеймін)- кеңістіктегі фигуралардың қасиеттерін зерттейтін геометрияның бөлімі. Стереометрия архитекторлар, конструкторлар, құрылысшылар және т.б. маман иелерінің күнделікті тәжрибелерінде жиі кездесетін объектілердің математикалық модельдері қарастырылып, зерттеледі. Сондай-ақ техникалық оқу орнының негізгі пәндері болып саналатын сызу мен сызба геометриясының негізі де осы стереометрия курсынан басталады. Сондықтан геометриның бұл бөлімі бәрімізге қажет ілім.

Кеңістікте **нүкте, түзу,** және **жазықтық негізгі фигуралар** болып саналады. Олар анықтамасыз қабылданады. Стереометрияда жазықтықтар саны көп. Олардың әрқайсысында планиметрия курсында оқылған фигуралардың барлық қасиеттері орындалады. Жалпы геометрияда жазықтықты шексіз тегіс бет деп қарастырады.

**Жазықтықты** параллелограмм түрінде немесе кез-келген облыс түрінде бейнелейді.

**Оларды көбнесе грек алфавитінің әріптерімен α, β, γ, δ, ε** т.с.с. белгілейміз. Нүктелерді латынның **А, В, С, D, ...** бас әріптерімен, ал түзулерді латынның **a, b, c, d,…** кіші әріптерімен немесе түзу бойында жататын **AB, CD, AC, …** қос нүкте арқылы белгілейміз.

Егер А нүктесі α жазықтығында жатса, онда оны **** арқылы белгілейді. Ал **** жазуы В нүктесі **α** жазықтығында жатпайды немесе α жазықтығы Внүктесіарқылы өтпейді дегенді білдіреді. Егер а түзуінің әрбір нүктесі **α** жазықтығында жатса, онда а түзуі **α** жазықтығында жатады немесе **α** жазықтығы а түзуі  арқылы өтеді. а түзуі **α** жазықтығында жатады, ал b түзуі мен **α** жазықтығының жалғыз ортақ С нүктесі бар. Мұнда **α** жазықтығы b түзуімен С нүктесінде қиылысады деп атайды және оны былай белгілейді.

Егер **α** және **β** жазықтықтарының екеуі де а түзуі арқылы өтсе, онда **α** және**β** жазықтықтары а түзуі бойымен қиылысады дейді. Және оны  түрінде жазады.

Стереометрия аксиомалары жүйесі планиметрияның аксиомаларына қоса мынадай үш аксиомадан тұрады.

**СІ. Әрбір жазықтықтың бойында жататын және оның бойында жатпайтын нүктелер табылады.**

**СІІ. Егер әр түрлі екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда бұл екі жазықтық осы ортақ нүктесі арқылы өтетін түзу бойымен қиылысады.**

**СІІІ. Егер әр түрлі екі түзудің ортақ нүктесі бар болса, онда бұл екі түзу арқылы жазықтық жүргізуге болады және бұл жалғыз болады.**

**Теорема, 1. Бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.**

**Теорема, 2. Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.**

**Теорема, 3. Егер түзудің екі нүктесі берілген жазықтықта жатса, түзу толығымен осы жазықтықта жатады.**

Сонымен жазықтықты: 1) Қиылысатын екі түзу; 2) бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте; 3) түзу және оның бойында жатпайтын нүкте арқылы толық анықтауға болады.

Бір жазықтықта жататын және қиылыспайтын түзулерді параллель түзулер деп атайды. Қиылыспайтын және бір жазықтықта жатпайтын түзулерді айқас түзулер деп атайды. Ал ортақ нүктесі бар екі түзу қиылысатын түзулер деп атайды.

**Кеңістікте екі түзу үш түрлі жағдайда орналасады**

**- қиылысады ;**

**- параллель;**

**- айқас орналасады (**а мен b-айқас түзулер).

**Кеңістікте екі жазықтық екі түрлі жағдайда орналасады**

* **жазықтықтар түзу бойымен қиылысады (****);**
* **жазықтықтар параллель болады .**

**1.Іздену:**

**Теорема, 1. Бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.**

**Дәлелдеуі.** Бір түзу бойында жатпайтын А, В, С нүктелері берілсін

Планиметрияның І аксиомасы бойынша (Геометрия, 7-сынып, І тарау, 1-т) әрбір екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады, яғни АВ және АС түзулерін жүргіземіз. Бұл түзулер беттеспейді , себебі А, В, С нүктелері теорема шарты бойынша бір түзу бойында жатпайды. Онда СІІІ аксиомасы бойынша АВ және АС түзулері арқылы өтетін жазықтық табылады және бұл жазықтық жалғыз . Теорема дәлелденді. Бұл жазықтықты АВС деп белгілейді.

В

А С

**Теорема, 2. Түзу мен оның бойында жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.**

**Дәлелдеуі.** Айталық а түзуі мен А  нүктесі берілсін. І аксиома бойынша атүзуі бойында жататын В нүктесін алып, АВ түзуін жүргіземіз. СІІІ аксиомасы бойынша бұл екі түзу арқылы жалғыз жазықтық өтеді. Теорема дәлелденді.

**Теорема, 3. Егер түзудің екі нүктесі берілген жазықтықта жатса, түзу толығымен осы жазықтықта жатады.**

**Дәлелдеуі.** Айталық а түзуінде жататын А және В нүктелері α жазықтығында жатсын. Онда  болатынын көрсету керек. Α жазықтығында жатпайтын С нүктесін алайық. Теорема, 1. Бойынша А, В, С нүктелері арқылы β жазықтығын жүргіземіз. α және β жазықтықтары А және В нүктелері арқылы өтетін түзу бойымен қиылысады (СІІ аксиомасы).Олай болса, АВ, яғни а түзуі α жазықтығында жатады. Теорема дәлелденді.

1. **Тұжырымдау:**

**№42** (Ш). Төмендегі математикалық жазуды нақты әрі ықшам түрде тұжырымда.

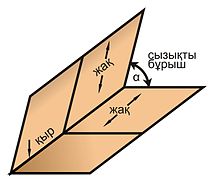
1. ; 3) ;
2. ; 4) .

№57 (Ш). Теореманың дұрыс не бұрыс екенін дәлелдеңдер.

1. ; 3) 
2. **Үй тапсырмасы.**
3. ** 4) **

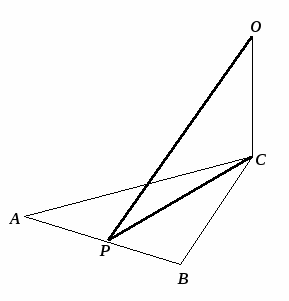
Сабақты қорыта келіп, төмендегі бақылау сұрақтарына жауап берейік.

**Екіжақты бұрыш** — бір [түзу сызықтан](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D2%AF%D0%B7%D1%83_%D1%81%D1%8B%D0%B7%D1%8B%D2%9B&action=edit&redlink=1) басталатын екі жарты [жазықтық](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B7%D1%8B%D2%9B%D1%82%D1%8B%D2%9B) жасайтын кеңістіктік пішін ([фигура](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B0)), әлгі жарты жазықтармен шектелген [кеңістіктің](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%B5%D2%A3%D1%96%D1%81%D1%82%D1%96%D0%BA%D1%82%D1%96%D0%BA&action=edit&redlink=1) бөлігі. Жарты жазықтық екіжақты бұрыштың жағы, ал ортақ түзу екіжақты бұрыштың қыры деп аталған. Екіжақты бұрыш қырының бір нүктесінен шығатын және де әр жақта жататын перпендикулярлар арасындағы сызықты (α) бұрышпен өлшенеді [[3]](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D2%B1%D1%80%D1%8B%D1%88_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)#cite_note-3)



А...D1 кубының сызбасында мына типтегі есептердің шығарылуында жоғарыда айтылған тұжырымдамалардың қалай қолданылатынын байқайық: кубтың параллель жақтарының диагональдары арқылы өтетін қима жазықтық түрін анықтау (экраннан көрсету: А1В диагоналі АВСD жазықтығына көлбеу, АВ кесіндісі – осы көлбеудің проекциясы, ВС кесіндісі көлбеуге перпендикуляр, яғниА1ВСD1 қима жазықтығы тік төртбұрыш болып шығатынын оқушылар түсіндіреді).

Енді кейбір есептерді қарастырайық. Алдымен оқулықтағы № 110 есептің талқыламасын есімізге түсірейік (экраннан талқылау ізімен есептің сызбасы және шешу жолы көрсетіліп отырады):



Бер: (АВС)-тең қабырғалы үшбұрышжазықтығы,

[OC] ⊥ (ABC),P ∈ [AB],⎢AP ⎢ = ⎢BP⎢,Д/к: [OP] ⊥ [AB].

Дәлелдеубарысы.

Сұрақ: АВ түзуі ОР көлбеуінеперпендикулярболуүшінқандайшарторындалукерек?

Жауап: Олүшін ОР көлбеуініңжазықтықтағыпроекциясы РС-ға АВ түзуініңперпендикулярекенінкөрсетуімізгеболады.

Сұрақ: Не себепті АВ мен РС перпендикуляр болады?

Жауап. АВС үшбұрышы тең қабырғалы болғандықтан және РС оның медианасы болғандықтан, ол әрі биссектрисасы, әрі биіктігі болады.

Сұрақ: Кеңістікте осы сызба бойынша РС тағы қандай қасиетке ие болады?

Жауап: Ол сонымен қатар ОР көлбеуінің (АВС) жазықтығындағы проекциясы болады.

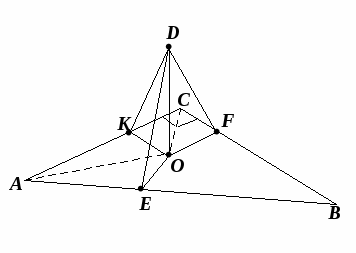
Сұрақ: Осыдан қандай қорытынды шығаруға болады?

Жауап: Үш перпендикуляр теоремасы бойынша АВ түзуі ОР көлбеуіне де перпендикуляр болады.

**2-тапсырма**(экраннан есептің шарты көрінеді):

Тік бұрышты үшбұрыштың катеті мен гипотенузасы сәйкесінше 12 және 15 см-ге тең. Берілген нүктеден үшбұрыш қабырғаларына дейінгі қашықтық 5 см. Берілген нүктеден үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

(экранға сызбасы және шарты символдармен жазылып түсіріледі).



Бер: АВС – тік бұрышты

үшбұрыш,

⎢АС⎢= 12см, ⎢AB⎢= 15см,

D∉ (ABC), [DO] ⊥ (ABC),

[DK] ⊥ [AC],[DF] ⊥ [ВC],[DE] ⊥ [AB],

⎜DK⎜= ⎜DF⎜= ⎜DE⎜= 5см.

Т/к: ⎜DO⎜.

Шешубарысы:

Есептіңшартыбойынша DK, DF, DE көлбеулерініңұзындықтарыбірдей, олайболса, олардыңпроекциялары - ОК, OF және ОЕ кесінділерідетеңболады. Соныменқатарүшперпендикуляртуралыкерітеоремағасәйкесолардыңәрқайсысыүшбұрышқабырғасынаперпендикуляр, сондықтаноларүшбұрышқаіштейсызылғаншеңбердіңрадиустарыболыпсаналады. Олайболса, О нүктесінүшбұрышбиссектрисаларыныңқиылысунүктесідепалуғаболады.

**11-дәріс**

**Призма және параллелепипед, куб**

Көлем – [геометриялық](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) денелердіңкеңістіктеналатынбөлігінсипаттайтын [шама](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D0%BC%D0%B0). Көлем геометриялықденелерге [байланысты](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%8B%D1%81) негізгішамалардыңбіріболыптабылады. Қарапайымжағдайда Көлем денеішінесиятын [бірлік](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%96%D1%80%D0%BB%D1%96%D0%BA) [кубтардың](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1) саныменөлшенеді. денелердің Көлемін есептеудетүрлі [математикалықережелер](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) қолданылды (мысалы, толықжәнеқиық [пирамидалар](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%B4%D0%B0), [цилиндрлер](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D1%80), т.б.). Күрделіденелердің көлемі былайанықталады.

Тікбұрышты [параллелепипедтің](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BF%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D0%B4) ішіне орналасқан  М дене,  [параллель](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D1%8C&action=edit&redlink=1) [жазықтықтармен](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B7%D1%8B%D2%9B%D1%82%D1%8B%D2%9B) қыры а-ға тең кубтарға бөлінеді. а [нөлге](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D3%A9%D0%BB) тез ұмтылып, шексіз кеми берсін. Vn – М денесіне сиятын кубтар Көлемінің қосындысы, ал Wn – М денесінің ішінде кемінде бір [нүктесі](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D2%AF%D0%BA%D1%82%D0%B5)болатын кубтар көлемінің қосындысы болсын. Егер V=Vn және W=Wn шектері өзара тең болса, онда олардың ортақ мәні V осы М денесінің Көлемі деп аталады. Дененің Көлемі мына формула бойынша анықталады: , мұндағы [интегралдау](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B4%D0%B0%D1%83&action=edit&redlink=1) [кеңістіктің](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B5%D2%A3%D1%96%D1%81%D1%82%D1%96%D0%BA)көрсетілген дене орналасқан бөлігін толық қамтиды

**Табанындағы көпбұрыштың параллелепипед**

**санына қарай (үшбұрышты,**

**бесбұрышты,алтыбұрышты т.б)** Тік Тікбұрышты

параллелепипед параллелепипед

(табаны параллелограмм) (табаны

тік төртбұрыш)

**Куб**-барлық жақтары квадрат болып келетін тікбұрышты параллелепипед

АА1, ВВ1, СС1- бүйір қырлары,биіктіктері

Үшбұрышты тік призма суреті

АВС, А1В1С1 - табандары

АСА1С1, ВСС1В1, АВВ1А1 – бүйір жақтары

Тік призманың бүйір бетінің ауданы бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең.Бүйір бетінің жазбасы тік төртбұрыш

(Жазбасынан призма құрастырып көрсету)

Табан қабырғалары: а1,а2,а3,...ап ; биіктігі- Н

Sб.б=а1Н+а2Н+а3Н+...+апН=(а1+а2+а3+...+ап)Н=рН

**Sбб= рН**

Тік призманың бүйір бетінің ауданы табанының периметрі мен биіктіктің көбейтіндісіне тең.

**Sт.б= Sб.б+2 Sтаб**

**Тік призманың толық бетіні ауданы бүйір бетінің ауданы мен табандарының аудандарының қосындысына тең**

Тікбұрышты призманың көлемі үш өлшемінің көбейтіндісіне тең.

**V=авс**

**Sтаб=ав. V=SтабН**

Тік призманың көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең

Тік бұрышты параллелепипед – бізге өте жақсы таныс фигура, өйткені көптеген заттар осындай пішінге ие. Ал, балалар қараңдаршы мына заттардың атын атайықшы. ( кітап , кірпіш, сіріңке қорабы) .Осы көріп тұрған заттарымыздың бәрі тікбұрышты параллелепипедке мысал бола алады.  
Ол тек тікбұрыштардан тұратын болғандықтан тік бұрышты параллелепипед деп аталады.

**Тік бұрышты параллелепипедтің және текшенің көлемі.  Көлемнің өлшем бірліктері.**

[](http://sabaq.kz/wp-content/uploads/2014/11/kv.jpg)

дененің көлемі және көлемнің өлшем бірліктері туралы түсініктерін қалыптастыру; көлемнің жаңа өлшем бірліктерімен таныстыру және олардың арасындағы қатынасты қою.

**12-дәріс**

**Пирамида және қиық пирамида**

**Пирамида және қиық пирамида**

Пирамида-деп бір жағы кез келген көпбұрыш, ал қалған n жағы төбелері ортақ үшбұрыштардан тұратын көпжақты атайды



1. AıBıCıDıЕıF – пирамидасы

2. ABCDEAıBıCıDıЕı – қиық пирамидасы алынды

Қасиеттері: 1. Табандары параллель 2. Табандары көпбұрыш 3. Бүйір жақтары трапеция 4. Табандарының арақашықтығы тең

Пирамида дегеніміз жазық көпбұрыштан – пирамиданың табанынан, табан жазықтығында жатпайтын нүктеден – пирамиданың төбесінен және пирамиданың төбесін табанының нүктелерімен қосатын барлық кесінділерден құралған көпжақ.

Аталған көпбұрыш пирамиданың табаны,ал ортақ төбесі бар үшбұрыштар бүйір жақтары,бүйір жақтарының бірігуі бүйір беті, бүйір жақтарының ортақ қабырғалары бүйір қырлары, барлық бүйір қырларының ортақ төбесі пирамиданың төбесі деп аталады.

АВСДЕ бесбұрышы – пирамиданың табаны, АРВ, ВРС, …, ЕРА үшбұрыштары – бүйір жақтары, РА, РВ, …, РЕ-бүйір қырлары және Р төбесі көрсетілген. Пирамиданы белгілегенде төбесін бірінші жазады.

Табанының төбелер санына байланысты пирамида үшбұрышты, төртбұрышты және т.с.с болып бөлінеді.

Пирамида төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген РО перпендикулярын пирамиданың биіктігідейді. Егер табаны дұрыс көпбұрыш болып төбесінің проекциясы табанының центріне дәл түссе, онда пирамида **дұрыс пирамида** деп аталады.

РАВСD… N  дұрыс n бұрышты пирамида болсын. Онда анықтама бойынша оның табаныАВСD … N  дұрыс n бұрыш, ал пирамиданыңР төбесінің проекциясы табанының центріО нүктесіне дәл келеді.

Дұрыс пирамиданың бүйір жағының пирамида  төбесінен түсірілген биіктігі**пирамиданың  апофемасы**деп аталады. Мысалы,  РК – дұрыс пирамиданың апофемасы.

Пирамиданың төбесі арқылы өтіп, табанымен қиылысатын жазықтармен қималары үшбұрыштар болып келеді. Бүйір қыры мен табанының диагоналы арқылы өтетін қиманы пирамиданың диагональдық қимасы деп атайды.

Мысалы, DPВ үшбұрышы – диагональдық қима.

**Қиық пирамида** деп пирамиданың табаны мен табан жазықтығына  параллель қима жазықтық  арасындағы бөлігі аталады.

Қиық пирамиданың табандарының қабырғалары қос – қостан параллель, сондықтан оның бүйір жақтары трапециялар болып табылады.

 Бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр**қиық пирамиданың биіктігі** деп аталады.

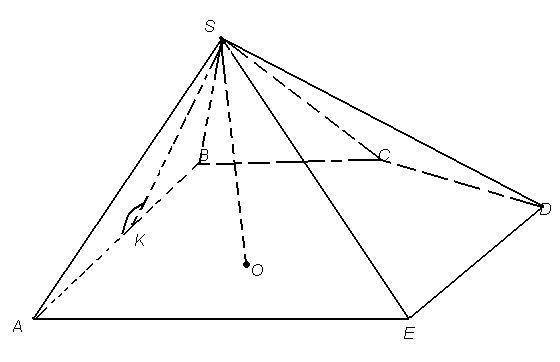
**Дұрыс қиық пирамида** деп дұрыс пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима  жазықтық арасындағы бөлігі аталады.

Бүйір жағының биіктігі дұрыс қиық пирамиданың апофемасы деп аталады.

**Пирамиданың көлемі**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Пирамида биіктігі: | Пирамиданың төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр. | |
| 2. Бүйір жақтары: | ASB, SBC, SDC, SDE, SAE. | |
| 3. Бүйір қырлары: | SA, SB, SC, SD, SE. | |
| 4. Пирамиданыңбүйірбетініңауданыоныңбарлықжақтарыныңаудандарыныңқосындысынатең. | 5. Пирамиданыңтолықбетініңауданыоныңбүйірбетініңауданыментабаныныңауданыныңқосындысынатең. | 6. Пирамиданыңкөлеміоныңтабаныныңауданыменбиіктігінңкөбейтіндісініңүштенбірінетең.. | |
| S(б.б.) = S(SAB) +  + S(SBC) + S(SCD)+  +S(SDE) + S(SEA) | S(т.б.) = S(б.б.) +  + S(таб.) | V = 1/3 S(таб.) \* H | |

Пирамида – табаны көпбұрыш болатын және бір ғана төбесі бар, бүйір жақтары төбелері ортақ үшбұрыштар болатын дене.



SABCDE – пирамида,

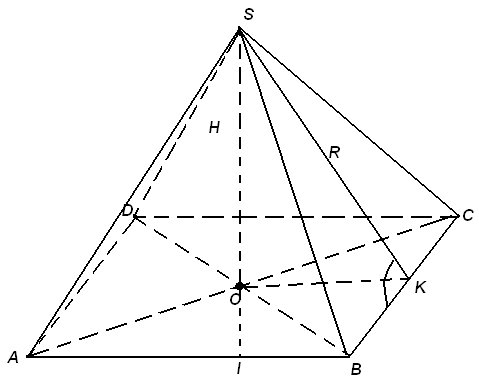
ABCDE –пирамиданың табаны,

S – пирамиданыңтөбесі,

SO – пирамиданыңбиіктігі (SO = H),

SK – бүйір жағының биіктігі ( SK = h).

Пирамиданыңтабаныдұрысп-бұрыштыкөпбұрышболатынжәнеоныңбиіктігіосып-бұрыштыңдиагональдарыныңқиылысунүктесіарқылыөтсе, ондапирамидадұрысдепаталады.



H – биіктік,

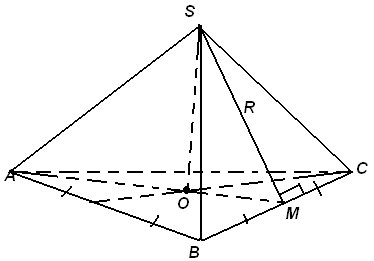
SO – ось,

R - апофема

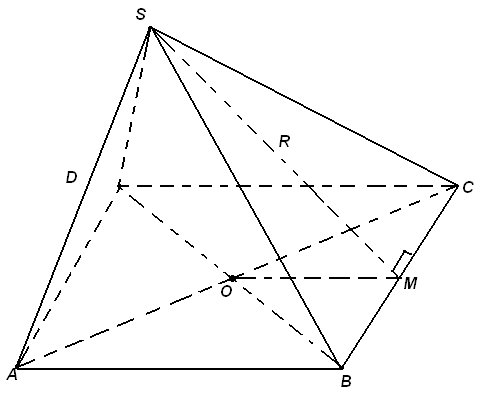
Дұрыспирамиданыңосідепоныңбиіктігіболатынтүзудіайтады.

Дұрыспирамиданыңапофемасыдепбүйіржағыныңбиіктігінайтады.

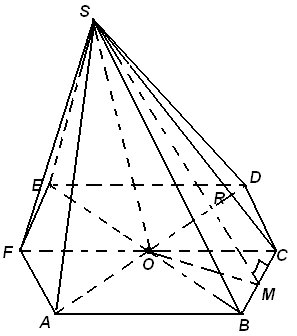
Үшбұрышты: ABC – теңқабырғалы;О – медианаларынңқиылысунүктесі (биіктіктерініңжәнебиссектрисаларының), сырттайсызылғаншеңбердіңцентрі.



Төртбұрышты:ABCD – квадрат; О – диагональдардыңқиылысунүктесі.



Алтыбұрышты: ABCDEF –дұрыс алтыбұрыш; О – диагональдардыңқиылысунүктесі AD, BE и FC.

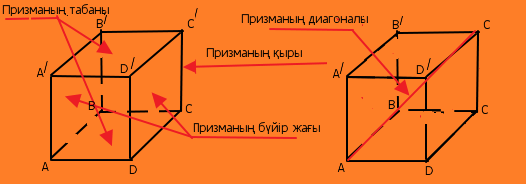


**13-дәріс**

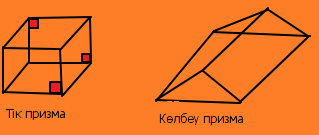
**Призма мен пирамиданың бүйір және толық беттері**

**Призма мен пирамиданың бүйір және толық беттері**

Призма деп екі параллель жазықтықта табандары жататын бүйір жақтары параллелограмм болатын көп жақты айтамыз. Призма табандары көп жақ болып келеді де,осы жақтарына сәйкес аталады.Мысалы: табаны үшбұрыш болса,үшбұрышты призма,ал алты бұрыш болса,алты қырлы призма дегендей.



Бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болатын призманы тік призма деп,ал бүйір қырлары табанына көлбеу болса,көлбеу призма деп аталады.

[](http://2.bp.blogspot.com/--D9JYsya4RA/UV7Tssve8iI/AAAAAAAAAPY/RgSbZhkDv5s/s1600/Prizma.gif)

Егер тік призманың табандары дұрыс көп бұрыштар болса,онда олдұрыс призма деп аталады.

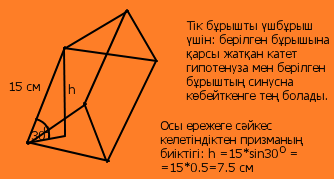
**Тік призманцң бүйір беті:**

Тік призманың бүйір беті (бүйір бетінің ауданы) табанының периметрін призманың биіктігіне көбейткенге тең болады: S=pһ  
Мұндағы: S-Призманың бүйір беті, p-призманың табанының периметрі,  һ-призманың биіктігі

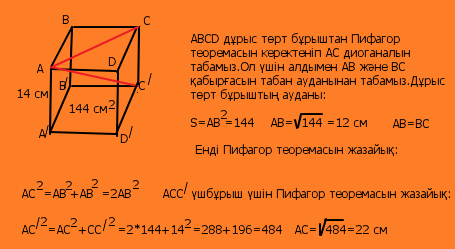
**Призманың толық беті:**

Призманың толық беті (толық бетінің ауданы) бүйір бетімен табандары аудандарының қосындысына тең болады. S=ph+2Sт    Мұндағы: ph-призманың бүйір беті, 2Sт- призманың табан аудандары (астынғы және үстіңгі табандары)

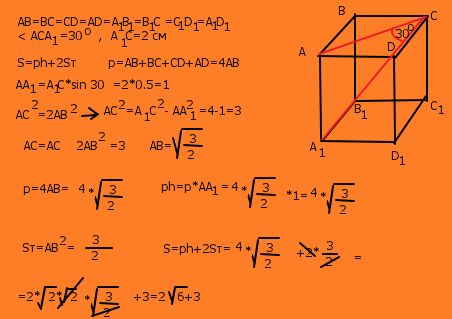
**Призманың көлемі:**Кез келген призманың көлемі оның табан ауданын биіктігіне көбейткенге тең болады. V=SH  Мұндағы: V-призма көлемі,S-призманың табанының ауданы,H-призманың биіктігі.  
**Есептер:**  
Есеп 1.Көлбеу призманың бүйір қыры 15 см және табан жазықтығына 30 градус бұрыш жасай көлбеген.Призманың биіктігін табыңдар

[](http://2.bp.blogspot.com/-itTs3HuNSMo/UV7a-L-_LCI/AAAAAAAAAPo/Tsxpp07N86k/s1600/Prizma.gif)

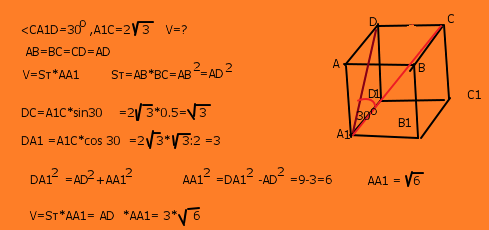
Есеп 2.Төрт бұрышты дұрыс призманың табан ауданы 144 кв.см,ал биіктігі 14 см.Призма диагоналын тап.

[](http://4.bp.blogspot.com/-GACR9oX33-k/UV7xkgjL89I/AAAAAAAAAP4/6UBs--qZE-A/s1600/Prizma+1.gif)

Есеп 3. Дұрыс төртбұрыш призманың диагоналы 2см және табанына 30 градус бұрыш жасайды. Призманың толық бетінің ауданын тап.

[](http://1.bp.blogspot.com/-k--NpshCOkc/UV7_EYnxmhI/AAAAAAAAAQI/1PT484SJcxI/s1600/Prizma+1.gif)

Есеп 4. Дұрыс дөрт бұрыш призманың диагоналы   
  
[http://2.bp.blogspot.com/-Yse8XHotUEM/UV_cxuKwQVI/AAAAAAAAAQY/E6DBb2uzK28/s1600/tvbir.png](http://2.bp.blogspot.com/-Yse8XHotUEM/UV_cxuKwQVI/AAAAAAAAAQY/E6DBb2uzK28/s1600/tvbir.png)- ке тең де,бүйір бетіне 30 градус  бұрыш жасайды.Призманың көлемін тап.

[](http://4.bp.blogspot.com/-Rf6t4wxHZD8/UV_nQiHxa1I/AAAAAAAAAQo/ULB78fMH3iM/s1600/Prizma+1.gif)

**14-дәріс**

**Цилиндр, конус және шардың бүйір беттері**

Конус

[](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D1%80%D0%B5%D1%82:Cone.JPG)[](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D1%80%D0%B5%D1%82:Cone.jpg)

Конус Дұрыс дөңгелек конус

Конус ([лат.](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D1%82%D1%8B%D0%BD_%D1%82%D1%96%D0%BB%D1%96) conus, [гр.](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D0%BA_%D1%82%D1%96%D0%BB%D1%96) 'konos' )  –

1.Конус немесе конустық бет–белгілі бір [сызықтың](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%8B%D0%B7%D1%8B%D2%9B) (бағыттаушы) барлық [нүктесін](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D2%AF%D0%BA%D1%82%D0%B5) кеңістіктің берілген нүктесімен ([төбесімен](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D3%A9%D0%B1%D0%B5)) қосатын [түзулердің](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D2%AF%D0%B7%D1%83) (жасаушыларының) [геометриялық](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) орны. Егер бағыттаушы [түзу сызық](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D2%AF%D0%B7%D1%83_%D1%81%D1%8B%D0%B7%D1%8B%D2%9B&action=edit&redlink=1) болса, онда Конус [жазықтыққа](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B7%D1%8B%D2%9B) айналады. Егер бағыттаушы өзінің төбесімен бір жазықтықта жатпайтын 2-ретті [қисық сызық](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D2%9A%D0%B8%D1%81%D1%8B%D2%9B_%D1%81%D1%8B%D0%B7%D1%8B%D2%9B&action=edit&redlink=1) болса, онда 2-ретті Конус шығады. [Дөңгелек Конус](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%94%D3%A9%D2%A3%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA_%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81&action=edit&redlink=1) немесе [тік дөңгелек Конус](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D1%96%D0%BA_%D0%B4%D3%A9%D2%A3%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA_%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81&action=edit&redlink=1) 2-ретті Конустың қарапайым түрі, оның бағыттаушысы [шеңбер](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B5%D2%A3%D0%B1%D0%B5%D1%80) болады, ал төбесі осы шеңбер центріне [ортогональ](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9E%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C&action=edit&redlink=1) [проекцияланады](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F);

2. [Элементар геометрияда](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) [дөңгелек](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D3%A9%D2%A3%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA) Конус деп бағытталған шеңбері бар, дөңгелек Конустың бетімен және оның осіне [перпендикуляр](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80) жазықтықпен шектелген геометриялық денені айтады.

Конустың ауданы:

~S = \pi R l

Бұл жерде ~R — радиусы, ~l — ұзындығы.

Конустың көлемі:

V={1 \over 3} \pi R^2H

Конустың базалық жазықтығы

Конустың базалық жазықтығы (Базовая плоскость конусa) — негізгі жазықтықтың осьтік жағдайын анықтауға немесе берілген конустың қосарланып отырған конуспен салыстыра осьтік жағдайын анықтауға арналған конус осіне [перпендикуляр](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80) жазықтық.

Қиық конус[[өңдеу](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81&action=edit&section=2)]

[](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D1%80%D0%B5%D1%82:%D2%9A%D0%B8%D1%8B%D2%9B_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81.jpeg)

Қиық конус — конустың табаны мен осы табанға параллел [жазықтықпен](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B7%D1%8B%D2%9B%D1%82%D1%8B%D2%9B) қиылып шектелген бөлігі. Басқаша айтқанда [толық конустың](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%BE%D0%BB%D1%8B%D2%9B_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81&action=edit&redlink=1) [сүйір](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D2%AF%D0%B9%D1%96%D1%80&action=edit&redlink=1) ұшы қырқылып тасталған "мұқыл" конус. Қиық конустың жоғарғы табанынан төменгі табанына түсірілген [перпендикуляр](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80) сызықтың екі табан аралығындағы [кесіндісі](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B5%D1%81%D1%96%D0%BD%D0%B4%D1%96) оның биіктігі ~(h) болады.

Қиық конустың бүйір жағының ауданы ~S_{b}=\pi l\left( R+r\right) , мұндағы ~l — қиық конустың жасаушысы, ~R және ~r — сәйкес түрде табандарының [радиустары](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D1%83%D1%81). Толық бетінің ~(S_{Tb}) (Тб) ауданы бүйір бетінің ~(S_{b}) (б)[ауданына](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%83%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D1%8B) қиық конустың жоғарғы табанының ~(S_{gT}) (жТ)ауданы мен төменгі табанының ~(S_{TT}) (ТТ)аудандарының қосындысына тең, яғни

~S_{Tb}=\pi l(R+r)+ \pi R+\pi r.

Қиық пирамиданың көлемі:~ V=\dfrac {1} {3}\pi h\left( R^{2}+R_{t}+r\right) мұндағы ~h — қиықконустың биіктігі.

Қиық конустың [жасаушысы](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%96%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%83%D1%88%D1%8B&action=edit&redlink=1): ~l=\sqrt {h^{2}\left( R-r\right) ^{2}}, ~R — қиық конустың төменгі табанының радиусы, ~r — жоғарғы табанның радиусы, ~h — қиық конустың биіктігі.

Толық конустың биіктігі: ~H=h+\dfrac {hr} {R-r}[[2]](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%83%D1%81#cite_note-2)

Цилиндр- айналу денесі

«Цилиндр» сөзі гректің kulindros сөзінен алынған, ол «валик» - «оқтау» мағынасын білдіреді.

Aнықтама. Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның қабырғаларының бірінен айналдырғанда шығатын фигураны (денені) атайды.

Бізді қоршаған ортада, тұрмыста цилиндр пішіндес заттар, обьектілер жиі кездеседі: металдан жасалған бөшкелер, консерві банкалары, хоккейдің шайбасы және т.б.

72-суретте АОО1В тіктөртбұрышын оның ОО1 қабырғасын қамтитын l осінен айналдырғанда шыққан цилинд бейнеленген.

ААО1В тіктөртбұрышының ОО1 осіне параллель АВ қабырғасы цилиндрдің бүйір беті деп аталатын қисық бетті жасайды және ол цилиндрдің жасаушысыдеп аталады. АО және О1В кесінділерінің айналуынан цилидірдің табандары деп аталатын өзара тең екі дөңгелек аламыз. Сонымен цилиндрдің беті цилиндрдің табаңдары деп аталатын екі дөңгелектен және цилиндрдің бүйір бетінен тұрады.

Егер цилиндрдің жасаушысы оның табанына перпендикуляр, яғни цилиндрдің биіктігіне тең болса, онда цилиндр тік дөңгелек цилиндр деп аталады.

**Цилиндрдің қимасы**

Цилиндрдің жазықтықпен қимасы деп жалғыз нүктеден, цилиндрдің жасаушысынан немесе табанынан өзгеше фигураны, яғни аталғандардан өзге цилиндр мен жазықтықтың ортақ бөлігін атайды.

Қиманы цилиндрдің осі арқылы жүргізуге болады(74 сурет). Мұндай қималар осьтік қималар деп аталады. Егер цилиндрдің остік қимасы квадрат болса, ондай цилиндр теңқабырғалы деп аталады.



Қиманы цилиндрдің осіне жүргізуге болады. Бұл қима цилиндр мен екі жасаушыдан өтетін жазықтықтың қиылысуынан алынып тұр.

Цилиндрді оның осіне перпендикуляр жазықтықпен қиюға да болады.

Егер цилидрдің бүйір бетін оның табандарын қимайтын және цилиндр осіне перпендикуляр емес «в» жазықтықпен қисақ, онда қимада элипс аламыз.

Теорема: Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын оның биіктігіне көбейткенге тең, яғни

 S ц.б.б = 2π RH

S ц.т.б = 2 π RH+2 R2

S ц.т.б = 2 πR(H+R)

Конус. Айналу денесі- конус.

Анықтама: Тікбұрышты үшбұрышты катетінен айналдырғанда шығатын фигура конус деп аталады. Грек. Ronos- «қарағай бүршігі»

Анықтама: Конустың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр конустың биіктігі болады. Табан шеңберінің кез келген нүктесін конустың төбесімен қосатын кесінділердің проекциялары тең, сондықтан олар – тең кесінділер. Бұл кесінділер конустың жасаушылары деп аталады. Конустың бүйір беті де конустық бет деп аталады.

Конус табанының радиусы R жасаушысының ұзындығы l ал биіктігі H болсын. Пифагор теоремасына сәйкес бұл шамалар l 2= R2 +H2

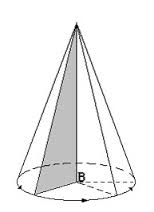
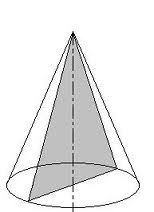
Теорема: Конустың бүйір бетінің ауданы оның табан шеңберінің ұзындығы мен жасаушының көбейтіндісінің жартысына тең, яғни

 S = πRl

R- конус табанының радиусы, l-конустың жасаушысы.

 S = πRl+πR2 = πR(l+R),

R- табанының радиусы, l-конустың жасаушысы.



**Конустың қимасы.**

Конустың қайсыбір екі жасаушысын қамтитын екі түзу арқылы бір ғана жазықтығын жүргізуге болады. Бұл жазықтық конустың табанын хорда бойымен, ал бүйір бетін екі жасаушы боймен қиып өтеді.

Аталған жазықтық пен конустың ортақ бөлігі теңбүйірлі үшбұрыш болып табылады.

Егер α жазықтығы конустың осі арқылы өтсе, онда қимада пайда болған үшбұрыш конустың осьтік қимасы деп аталады.

Егер конустың бүйір бетін табанымен қиылыспайтын және конустың осіне перпендикуляр емес жазықтықпен қиып өтсек, онда қимада элиппс аламыз.

Анықтама: Конустың табаны мен табанына параллель қиманың арасындағы бөлігі қиық конус деп аталады.

Анықтама: қиық конустың бір табанының қайсыбір нүктесінен екінші табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр қиық конустың биіктігі деп аталады.

Конустың бүір бетінің ауданының формуласы бойынша

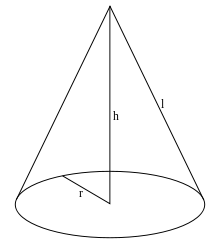
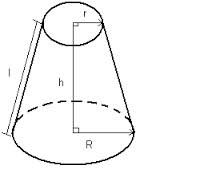
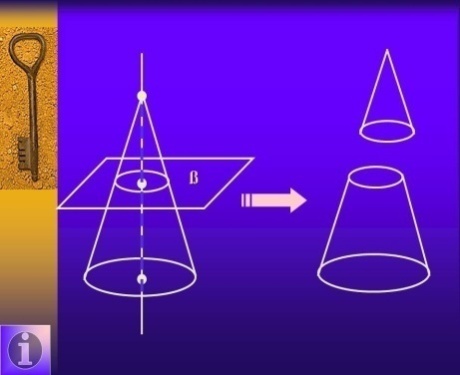
Sқ.кон.б.б. = πl(R+r)

Теорема: Қиық конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңберлерінің қосындысының жартысы мен жасаушының көбейтіндісіне тең

Sқ.кон.б.б. = hello_html_540850d6.gif\*l=hello_html_m49f13536.gif\*l

Sқ.кон.б.б. = πl(R+r)+πR2+πr2

Мұндағы l-жасаушы, ал r – мен R - конус табандарының радиустары.



Көлемі

Бізге призманың көлемі табанының ауданынын оның биіктігіне көбейткенге тең екені белгілі. Призма мен цилиндрдің ұқсастығынан цилиндрдің көлемі де табанының ауданы мен оның биіктігінің көбейтіндісіне тең деп алуымызға болады.

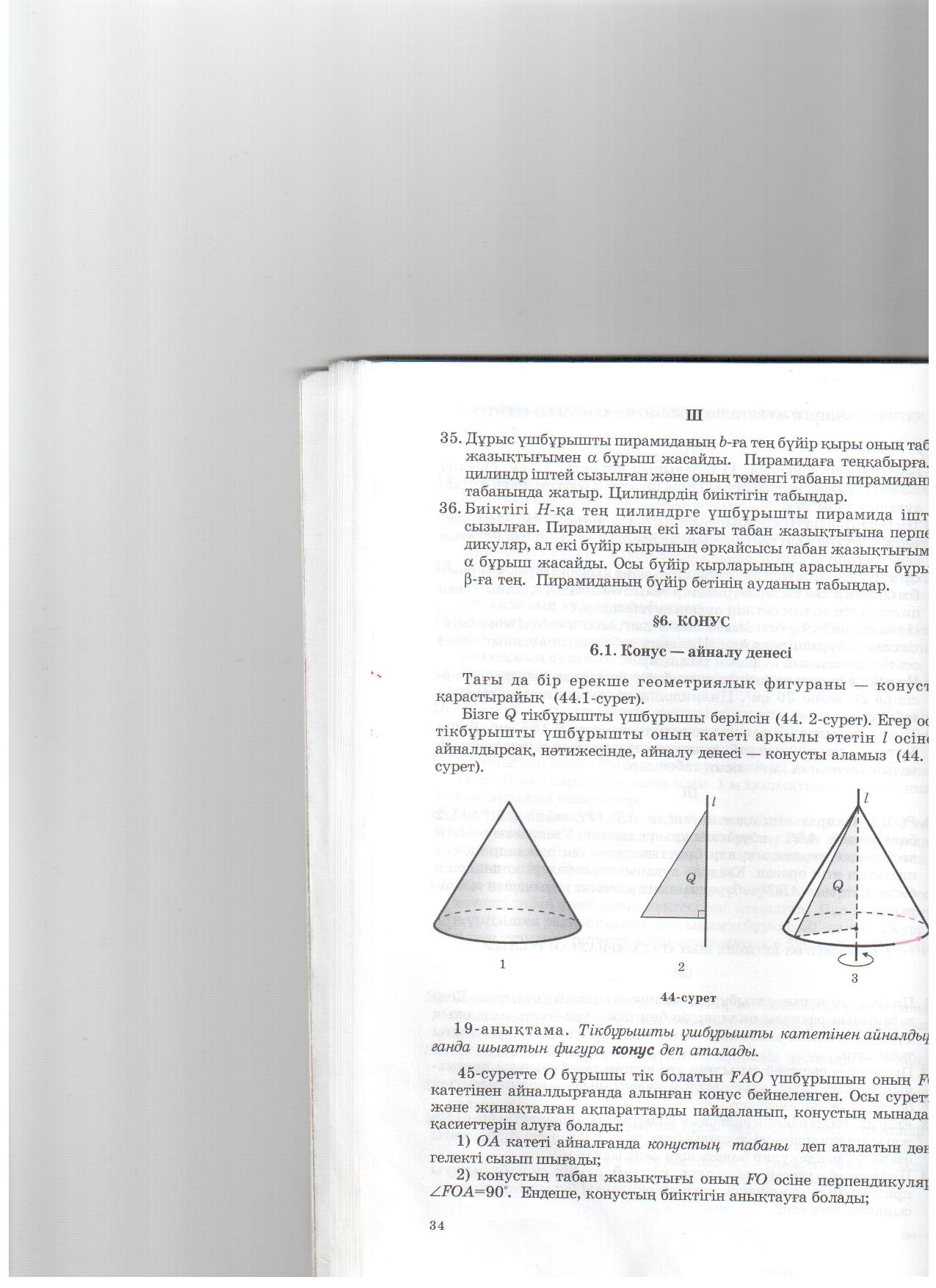
Vц = SH

Vц = πR2H

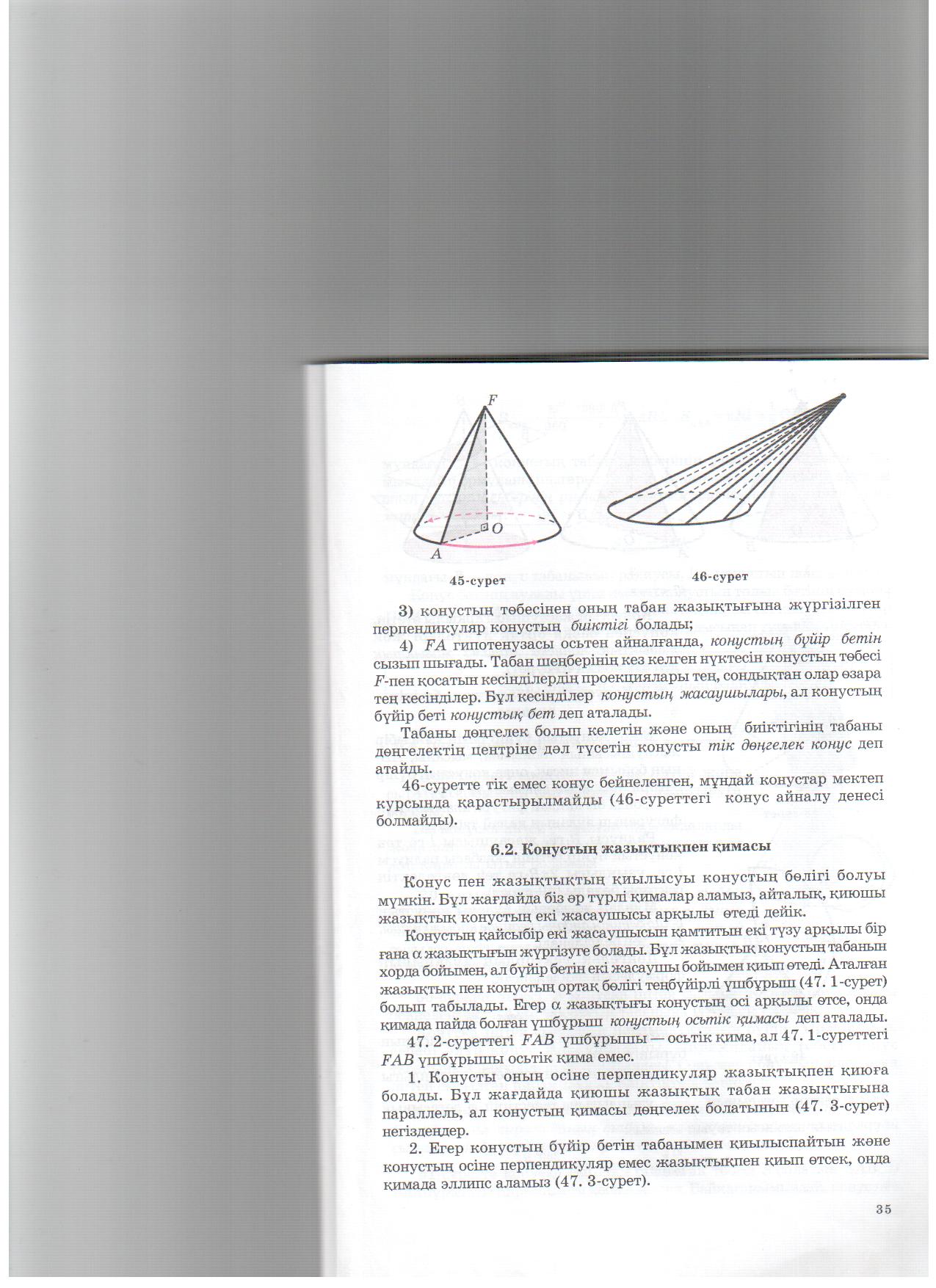
Конустың көлемін есептегенде, оның пирамидамен ұқсастығын ескеріп, конустың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең, V к =hello_html_7f8f9891.gifSH

Vк = hello_html_7f8f9891.gif πR2H

Анықтама: Тікбұрышты үшбұрышты катетінен айналдырғанда шығатын фигура конус деп аталады.



Конустың түрлері



Табаны дөңгелек болып келетін және оның биіктігінің табаны дөңгелектің центріне дәл түсетін конусты тік дөңгелек конус деп атаймыз.

Тік емес конустар мектеп курсында қарастырылмайды. Бұл конус айналу денесі болмайды.

Конустың қималары



1 - сурет – Жазықтық конустың табанын хорда бойымен, ал бүйір бетін екі жасаушы бойымен қиып өтеді. Қима – тең бүйірлі үшбұрыш

2 - сурет – Жазықтық конустың осі арқылы өтсе, онда қимада пайда болған үшбұрыш конустың осьтік қимасы деп аталады. Қима - үшбұрыш

3 - сурет – Конусыты оның осіне перендикуляр жазықтықпен қиюға болады. Бұл жағдайда қиюшы жазықтық табан жазықтығына параллель, ал конустың қимасы – дөңгелек

4 - сурет – Конустың жасаушысы арқылы өтетін, конуспен ортақ нүктелері жоқ жазықтық конусқа жанама жазықтық деп аталады.

Негізгі формулалар

Конустың бүйір бетінің ауданы оның табан шеңберінің ұзындығы мен жасаушысының көбейтіндісінің жартысына тең:

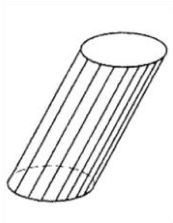
**Sк.б.б. =πRL**

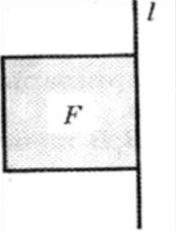
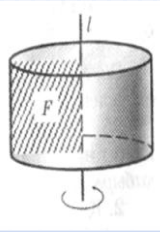
**Sтаб =πR2**

**Sк.тол.беті =πRL + πR2 = πR(L + R)**

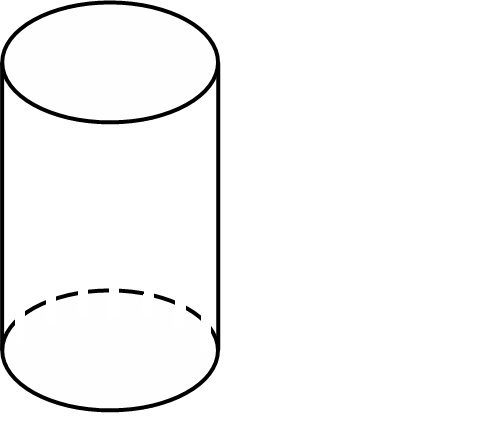
**L- конустың жасаушысы, R – табанының радиусы**

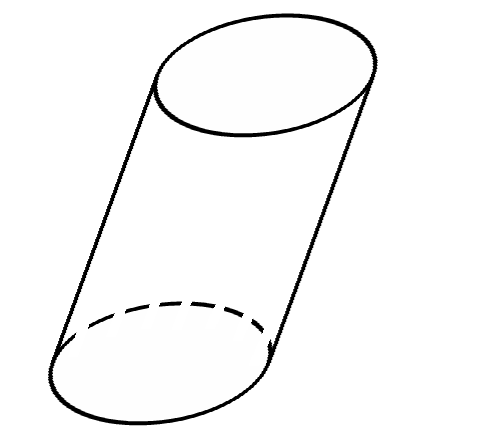
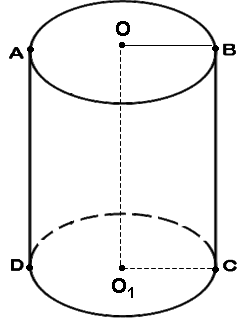
Анықтама: Тіктөртбұрышты оның бір қабырғасынан айналдырғанда алынған геометриялық денені тік цилиндр дейміз.





Егер цилиндрдің жасаушылары табандарына перпендикуляр, яғни цилиндрдің биіктігіне тең болса, онда цилиндр тік дөңгелек цилиндр деп аталады.

Егер цилиндрдің жасаушылары табандарына қандай да бір а бұрыш жасап көлбеген болса, онда цилиндрді көлбеу цилиндр деп аталады.



Негізгі формулалар

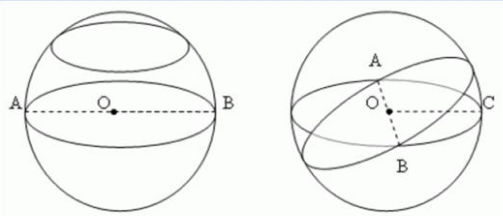
**Sц.б.б. =2πRh**

**Sтаб =2πR2**

**Sц.тол.беті =2πRh + 2πR2 = 2πR(h + R)**

**h-цилиндр биіктігі, R – табанының радиусы**

Анықтама: Жарты дөңгелекті оның диаметрінен айналдырғанда шыққан геометриялық дене шар деп аталады.



**Sсфера =4πR3Vшар =**

**R – радиус**

Негізгі формулалар

Есептер шығарту

№1 есеп

Конустың жасаушысы 12 дм және табан жазықтығына 300 бұрышпен көлбеген. Конустың биіктігін табыңыз.

Sin300=H/L, 1/2= H/12 , H=6 , Жауабы: 6 (дм)

№2 есеп

Конустың биіктігі 20 см, табанының радиусы 15 см. Бүйір бетінің ауданын табыңыз.

Sк.б.б. =ПRL

L2= H2 + R2 = 400 + 225 = 625, L= 25см

Sк.б.б. =П\* 15\* 25 = 375 П см2, Жауабы: 375 П см2

№3 есеп

Конустың жасаушысы 5 см, табанының радиусы 4 см. Толық бетінің ауданын табыңыз.

Sк.тол.беті =ПRL + ПR2

Sк.б.б. =П \* 4 \*5 = 20 П,

Sтаб =П \* 42= 16П

Sк.тол.беті = 20П + 16П = 36П Жауабы: 36П (см2)

№4 есеп

D=12 см Шешуі: Sт.б= 2ПRH + 2П R2

H= 3,5 см R = D/2 = 12/2 = 6см

т/к: Sт.б=? Sц.бб= 2ПRH=2П\*6\*3,5=42П (см2)

Sт=2П R2= 2П\*62= 72П (см2)

Sт.б= 2ПRH + 2П R2= 42П + 72П = 114П см2

Жауабы: 114П см2

**Шар және шарлық сегмент, сектордың көлемі**

Айналу денелерінің ішінде шар (сфера) ерекше орын алады. Шар және оның бөліктерін оқыған кезде ғана оқушылар шеңбер мен дөңгелек туралы планиметрия курсынан және мектептегі басқа да пәндерден (сызу, география, астрономия т.б.) білімдерін пайдалануға толық мүмкіндік алады. Осыған байланысты мұғалімнің негізгі міндетті, қажетті тұжырымдарды оқушылардың өздері айтатындай оқу процесін ұйымдастыру болып табылады.

Шар мен сфераның цилиндр мен конус ұғымдарынан ерекшелігі олардың дөңгелек пен шеңбердің кеңістіктегі түрі ретінде баяндалуы. Шар берілген нүктеден берілген қашықтықтан артық емес қашықтықта жататын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын дене ретінде анықталады. Сфера шар беті ретінде анықталады. Алынбалы модельде шар элементтері көрсетіледі: центрі, радиусы, диаметрі, шардың диаметральды қарама-қарсы нүктелері. Шардың (сфераның) негізгі элементтерін кескіндеуге бірнеше жаттығу орындатып жіберу керек. Шардың жарты дөңгелектің диаметрінен осі ретінде айналғанда шығатынын оқушылар қиындықсыз меңгереді.

Шардың жазықтықпен қимасының формасын және өлшемдерін қарастырмастан бұрын түзу мен дөңгелектің (шеңбердің) өзара орналасуын шармен (сферамен) жазықтықтың өзара орналасуына сәйкес еске түсіру керек.

Шардың жазықтықпен қимасын қарастырғанда алдымен жазықтықтың шар бетімен (сферамен) қиылысуын қарастырған орынды. Бұл қиылысудың шеңбер болатындығын және оның центрі сфера центрінен қиюшы жазықтыққа жүргізілген перпендикулярда болатындығын, ал радиусы анықтау қиынға соқпайды, мұнда R– сфера радиусы, Н – сфера центрінен қиюшы жазықтыққа дейінгі қашықтық. Осыдан кейін шар мен қиюшы жазықтықтың ортақ нүктелері ретінде дөңгелек, ал оның шекарасы жоғарыда алынған шеңбер болатындығы алынады

Шар —бір [нүктеден](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D2%AF%D0%BA%D1%82%D0%B5) (орталығы-центрі) басқа нүктелердің [кеңістік](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B5%D2%A3%D1%96%D1%81%D1%82%D1%96%D0%BA) бойынша бір қашықтықта ([радиус](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D1%83%D1%81)) орналасқанда пайда болатын [пішін](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D1%88%D1%96%D0%BD) ([фигура](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B0)) шар. Шар негізінен іші бос кеңістік және бүтін болады. Шар пішіндес заттар табиғатта өте көп кездеседі: [жер шары](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B5%D1%80_%D1%88%D0%B0%D1%80%D1%8B), [жұлдыздар](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D2%B1%D0%BB%D0%B4%D1%8B%D0%B7), [атом](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%82%D0%BE%D0%BC) және оның құраушылары, су тамшысы, ыдыстардың дөңгелектеніп келуі негізінен [бүкіл әлемдік тартылыс заңына](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D2%AF%D0%BA%D1%96%D0%BB_%D3%99%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B4%D1%96%D0%BA_%D1%82%D0%B0%D1%80%D1%82%D1%8B%D0%BB%D1%8B%D1%81_%D0%B7%D0%B0%D2%A3%D1%8B) [магнит өрісіне](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D0%B8%D1%82_%D3%A9%D1%80%D1%96%D1%81%D1%96) тәуелділігі яғни бір нүктеге басқа нүктелердің тартылуы шардың пайда болуына әсер етеді.

Шардың [көлемін](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D3%A9%D0%BB%D0%B5%D0%BC) V=3πR³

Шардың бетінің [ауданын](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%83%D0%B4%D0%B0%D0%BD) S=4πR²

[Шар бетінің ауданы](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A8%D0%B0%D1%80_%D0%B1%D0%B5%D1%82%D1%96%D0%BD%D1%96%D2%A3_%D0%B0%D1%83%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D1%8B&action=edit&redlink=1) S және [көлем](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D3%A9%D0%BB%D0%B5%D0%BC_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)&action=edit&redlink=1) V шар радиусы r \pi саны («пи» деп оқылады) π-[пи саны](https://kk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8_%D1%81%D0%B0%D0%BD%D1%8B) —[тұрақты сан](https://kk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D2%B1%D1%80%D0%B0%D2%9B%D1%82%D1%8B_%D1%81%D0%B0%D0%BD&action=edit&redlink=1)

S = \ 4\pi r^2

S = \ \pi d^2

V = \frac{4}{3} \pi r^3



Сфераға (шарға) жанама жазықтықтар.

Шеңберге жүргізілген жанама мен оның қасиеттерін белгілі.Жазықтық пен шардың (сфераның) өзара орналасу жағдайларының ішінде шар мен сфераға жанама жазықтық туралы түсінік кездеседі.

А: Шарға (сфераға) жанама жазықтық деп шармен (сферамен) ортақ тек бір ғана нүктесі бар жазықтықты атайды.

Ортақ нүкте жанасу нүктесі деп аталады.Біз жазықтық пен сфера (шар) осы нүктеде жанасады деп атайтын боламыз.



155 – суретте  жазықтығы мен сфера А нүктесінде жанасып тұр.

13-теорема.Шар (сфера) радиусының сыртқы ұшында радиусқа перпендикуляр өтетін жазықтық шарға (сфераға) жанама жазықтық болады.

.Дәлелдеу:

(O;R)сферасы

А а; А нүктесінде ОА радиусқа перпендикуляр жазықтығы(155-сурет).

а жазықтығы берілген сфераға жанама жазықтық болады.

Біз а жазықтығының А нүктесінен басқа ешбір нүктесі сферада жатпайтынын дәлелдеуіміз керек.

а жазықтығының кез келген Х нүктесін аламыз.

О мен А; О мен Х; А мен Х нүктелерін қосайық

ОАХ тікбұрышты үшбұрышы шықты ОА перпендикуляр АХ

ОА радиусы а жазықтығына перпендикуляр, ОХ көлбеу, ОА кіші ОХ не Ох үлкен R

Х нүктесі сферада жатқан жоқ, демек, а жазықтығы сфераға жанама.

14- теорема. Сфераға жанама әрбір жазықтық жанасу нүктесінде радиусқа перпендикуляр болады.

Дөңгелектің, сфера мен шардың бөліктері

А: Шардың жазықтықпен қиып түсірген бөлігін шар сегменті деп атайды.



Шар сегменті:

сегменттік бет деп аталатын сфераның бөлігімен;

шар сегментінің табаны деп аталатын дөңгелекпен шектелген.

179-суретте В нүктесі арқылы өтетін жазықтық шарды екі шар сегментіне қиып түсірген.

Сфераның жазықтықпен қиып түсірген бөлігін сфералық сегмент, ал сфера мен жазықтықтың қиылысу шеңберін сфералық сегменттің табаны деп атайды.

А: Шар сегментінің және сфералық сегменттің биіктігі деп сегменттің табаныны перпендикуляр радиустың шар сегментіне тиісті кесіндісін атайды.

А: Шар белдігі (қабаты) деп осы шармен қиылысқан параллель екі жазықтықтың арасындағы шар бөлігін атайды.

А: Сфералық белдік (қабат) деп оның параллель екі қимасының арасындағы сфера бөлігін атайды.

Шар қабатының (белдігінің) беті шар қабатының табандары деп аталатын екі дөңгелектен және сфералық белдіктен тұрады.

А: Шар қабатының биіктігі деп бір табанының нүктесінен екінші табанының жазықтығына түсірілген перпендикулярды айтады.

А: Сфералық белдіктің биіктігі деп сәйкес шар қабатының биіктігі аталады.



**15-дәріс**

**Курс бойынша есептер шығару**

**№ 1 есеп**

Пирамиданың табаны – тік төртбұрыш, оның қабырғалары 6 см және 8 см. Оның әрбір қыры 13 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін есептеп шығарыңдар.

Берілгені:  — пирамида.

6 см                Шешуі:  үшбұрышынан

8 см                 (см)

13 см                 OS үшбұрышынан

Т/к  SO-?

SO

Жауабы: 12 см

Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың биіктігі 5 см-ге тең. Табан- дарының қабырғалары 8 см және 6 см. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

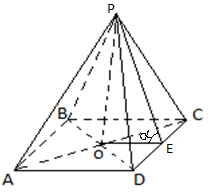
Берілгені:һ=5см а=8см в=6см

Шешуі:Табандарының диагоналын табады.d1=6d2=8

AN=(8 - 6)/2 = ; AA1 = = = 3 ; жауабы: 3  
**№2 есеп**. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың биіктігі 2 см, ал табанының қабырғалары 3 және 5 см. Осы пирамиданың диагоналін табыңдар.

Жауабы: 6см.

**№3 есеп.** Дұрыс төртбұрышты пирамиданың толық бетінің ауданын табыңыз. ∠PEO = 60°

Берілгені:

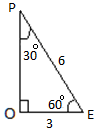
ABCD - квадрат

AD = 6

∠PEO = 60°

Табу керек: Sт.б = ?

Шешуі:

1)

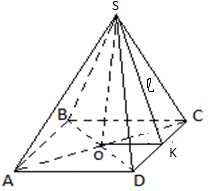
2)

∆ PEO – тік үшбұрыш, егер ∠PEO = 60°

Онда ∠OPE = 30°, сондықтан PE = 6 см

4)

Жауабы: (D)

Есеп 2. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың көлемі 3 см3, биіктігі 2 см-ге тең. Бүйір бетінің ауданын табыңыз.

Берілгені:

V = 3 см3

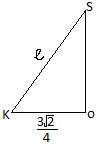
SO = 2 см (биіктігі)

Табу керек: Sб.б = ?

Шешуі:

1) ABCD - квадрат

2)

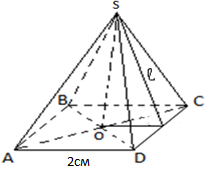
3)

4) Қарастырамыз ∆SOK

5)

Жауабы: (D)

**№4 есеп.**

 Көлемі 4 см3, ал табанының қабырғасы 2 см-ге тең төртбұрышты дұрыс пирамиданың бүйір қырының ұзындығын табыңыз.

Берілгені:

V = 4 см3

AD = 2 см

Табу керек: SD = ?

Шешуі:

1)

2) ABCD - квадрат

3) онда

Жауабы: (C)